

# Força Óptica em Pinças Ópticas: Estudo Teórico e Experimental

Tese de Doutorado

Antônio Álvaro Ranha Neves

Orientador: Prof. Dr. Carlos Lenz Cesar

*Este exemplar corresponde à redação final  
da tese de DOUTORADO defendida pelo aluno Antônio  
Álvaro Ranha Neves e aprovada pela comissão julgadora.  
Campinas, 30/01/2008  
Carlos Lenz Cesar.*

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Carlos Lenz Cesar – DEQ/IFGW/Unicamp

Prof. Dr. Sanclayton Geraldo C. Moreira – DF/UFPA

Prof. Dr. Paulo Américo Maia Neto – IF/UFRJ

Prof. Dr. Luiz Carlos Barbosa – DEQ/IFGW/Unicamp

Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/Unicamp

Campinas, fevereiro de 2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

N414f Neves, Antonio Alvaro Ranha  
Força óptica em pinças ópticas : estudo teórico e experimental /  
Antonio Alvaro Ranha Neves. -- Campinas, SP : [s.n.], 2006.

Orientador: Carlos Lenz Cesar.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1. Pinças ópticas. 2. Aprisionamento a laser.  
3. Eletromagnetismo. 4. Difração vetorial. 5. Microscopia.  
I. Cesar, Carlos Lenz. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

(vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Optical force in optical tweezers : theory and experiment
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
  - 1. Optical tweezers
  - 2. Laser trapping
  - 3. Electromagnetism
  - 4. Vectorial diffraction
  - 5. Microscopy
- **Área de concentração:** Física
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**
  - Prof. Carlos Lenz Cesar
  - Prof. Luiz Carlos Barbosa
  - Prof. José Antonio Roversi
  - Prof. Sanclayton Geraldo Carneiro Moreira
  - Prof. Paulo Américo Maia Neto
- **Data da defesa:** 13.03.2006
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **ANTÔNIO ÁLVARO RANHA NEVES – RA 994946** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 13 / 03 / 2006.

**COMISSÃO JULGADORA:**

*Carlos Lenz Cesar*

Prof. Dr. Carlos Lenz Cesar (Orientador do Candidato) –  
DEQ/IFGW/UNICAMP

*Paulo Américo Maia Neto*

Prof. Dr. Paulo Américo Maia Neto – IF/UFRJ

*Sanclayton Geraldo Carneiro Moreira*

Prof. Dr. Sanclayton Geraldo Carneiro Moreira – DF/UFPA

*Luiz Carlos Barbosa*

Prof. Dr. Luiz Carlos Barbosa – DEQ/IFGW/UNICAMP

*José Antonio Roversi*

Prof. Dr. José Antonio Roversi – DEQ/IFGW/UNICAMP





*Dedico este trabalho aos  
meus pais e aos meus padrinhos.*



# Agradecimentos

Aos meus pais, à minha irmã e meus padrinhos. Apesar da distância, sempre estiveram presentes e sempre me deram apoio, educação e suporte que foram fundamentais nesta etapa da minha vida para chegar onde estou hoje.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Lenz Cesar, por esta oportunidade; por ter creditado sua paciência e confiança no meu trabalho, durante os vários anos que trabalhamos juntos; e pelas discussões importantes não só para o desenvolvimento do projeto mas também para o crescimento de minha formação como pesquisador.

Agradeço ao Prof. Dr. Luiz Carlos Barbosa, Prof. Dr. Jose Antonio Roversi. À gerente executiva do CePOF Simone Silva Telles. Aos técnicos Silvio e Zairo.

À Flavia agradeço por este tempo de união, desejando que a amostra de felicidade se perpetue por toda a nossa vida. Pelo apoio incondicional, compressão e amor nos tempos mais difíceis.

Aos meus amigos, tenho inúmeros motivos para agradecer, por terem me ajudado tanto pessoalmente como profissionalmente, tornando a rotina do laboratório mais fácil. Assim limito-me a listar os nomes em ordem alfabética daqueles que por um motivo ou outro foram importantes neste período: Adriana, André, Diogo, Eugenio, Enver, Gaston, Gilberto, Gustavo, Herculano, Lazaro, Liliana e Wendel. Enfim, agradeço aqueles que direta ou indiretamente, contribuíram e ajudaram-me com suas dicas.



*"Query 1. Do not Bodies act upon Light at a distance, and by their bend its Rays;  
and is not this action (cæteris paribus) strongest at the least distance?"  
Opticks (Book Three, 1704)  
Isaac Newton*



# Resumo

A pinça óptica é um instrumento capaz de manipular e aprisionar partículas dielétricas por meio da pressão de radiação. Suas aplicações nas ciências da vida e biofísica cresceram exponencialmente após a demonstração de que ela permitia manter vivos microorganismos capturados por longos tempos. Informações obtidas destes experimentos requerem um transdutor de força, para o qual se utiliza o deslocamento de uma microesfera capturada. Estamos portanto trabalhando no limite dos regimes de óptica geométrica e Rayleigh, que geralmente são utilizados para simplificar a força óptica.

Até hoje não existe consenso entre as teorias das forças, para um regime de tamanho arbitrário, nas pinças ópticas nem para sistemas de alta simetria como microesferas, muito menos em geometrias mais complicadas. Uma das maiores dificuldades encontradas nesse aspecto é a ausência de boas medidas experimentais das forças ópticas, independentes de modelos. Por isso grande parte do trabalho dessa tese foi o desenvolvimento de um sistema de medidas de forças ópticas utilizando pinças duplas para obtenção de toda uma curva da força em função do deslocamento tridimensional da partícula capturada, e não apenas os valores da força em posições fixas. A segunda grande contribuição vem da descrição teórica da força óptica. A grande dificuldade nesse aspecto é a descrição de um feixe incidente de grande abertura numérica e sua decomposição em ondas parciais. É nesse contexto que se encaixa esse trabalho de tese. Acreditamos ter dado uma

contribuição extremamente valiosa resolvendo de forma analítica e exata o problema da decomposição de um feixe convergente em ondas parciais relativas a qualquer origem do sistema de coordenadas em três dimensões.



# Abstract

The optical tweezers is an instrument capable of manipulating and trapping dielectric particles through the radiation pressure. Their applications in the life sciences and biophysics increased exponentially after it has been demonstrated that it allowed to microorganisms to be maintained alive trapped for long times. Information obtained from these experiments requires a force transducer, for which the displacement of the captured micro sphere is used. We are therefore working in the limit of the geometrical optics and Rayleigh regime, which are usually used to simplify the optical force.

Until today consensus fails to exist among the theories of forces for optical tweezers, of an arbitrary size regime, neither for systems of high symmetry as micro spheres, much less in more complicated geometries. One of the greatest difficulties encountered in this aspect is the absence of good experimental measurements of optical forces, independent of models. Therefore great part of this thesis was the development of a system capable of measuring optical forces using a double tweezers setup to obtain an entire curve of the force as a function of the three-dimensional displacement of the trapped particle, and not just the values of the force for fixed positions. The next grand contribution comes from the theoretical description of the optical force. The large difficulty in this aspect is the description of incident

beams of great numerical aperture and its decomposition in partial waves. It is in this context that this thesis fits in. We believed to have given an extremely valuable contribution, solving in an analytical and exact way the problem of the decomposition of a convergent beam partial waves relative the any origin of the three dimensional coordinate system.

# Sumário

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 APLICAÇÕES BIOLÓGICAS.....	2
1.2 HISTÓRICO DO GRUPO .....	5
1.3 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	9
<b>CAPÍTULO 2 TEORIA</b>	<b>13</b>
2.1 TEORIA ELETROMAGNÉTICA.....	19
2.1.1 Formulação do Problema .....	20
2.1.2 Solução Escalar da Equação de Onda.....	22
2.1.3 Solução Vetorial da Equação de Onda .....	25
2.1.4 Campos Transversais.....	29
2.1.5 Expansão de uma Onda Arbitrária .....	31
2.1.6 Espalhamento Lorenz-Mie Generalizado .....	33
2.1.7 Seções de Choque .....	41
2.2 FORÇAS EM EM UMA ESFERA .....	43
2.3 O FEIXE INCIDENTE.....	50
2.3.1 Representação do Espectro Angular.....	51
2.3.2 Feixe Paraxial .....	53
2.3.3 Campos Para Regiões Distantes .....	57
2.3.4 Campos Focalizados .....	60

2.3.5 Deslocamento Focal .....	68
<b>2.4 SOLUÇÃO EXATA .....</b>	<b>72</b>
2.4.1 Sistema com Deslocamento Focal .....	81
2.4.2 Caso Axial .....	87
2.4.3 Caso Radial.....	89
<b>2.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>90</b>
 <b>CAPÍTULO 3 MÉTODO EXPERIMENTAL _____</b>	 <b>93</b>
<b>3.1 ARQUITETURA DA PINÇA ÓPTICA.....</b>	<b>94</b>
3.1.1 Laser .....	94
3.1.2 Região de Aprisionamento.....	96
3.1.3 Movimentação do Feixe .....	97
3.1.4 Sistema de Detecção .....	98
<b>3.2 MONTAGEM EXPERIMENTAL .....</b>	<b>100</b>
3.2.1 Escolha dos Componentes Ópticos.....	102
3.2.2 Controle Radial .....	103
3.2.3 Controle Axial .....	106
3.2.4 Amostras e Preparação .....	108
3.2.5 Alinhamento Óptico.....	109
<b>3.3 FORÇA ÓPTICA.....</b>	<b>111</b>
3.3.1 Medidas de Força Radial .....	113
3.3.2 Medidas de Força Axial.....	114
<b>3.4 EXCITAÇÃO DOS MODOS MDR .....</b>	<b>115</b>
<b>3.5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>117</b>
 <b>CAPÍTULO 4 RESULTADOS _____</b>	 <b>119</b>
<b>4.1 VALIDAÇÃO .....</b>	<b>120</b>
<b>4.2 FORÇAS ÓPTICAS: SIMULAÇÃO .....</b>	<b>124</b>
4.2.1 Forças Radiais .....	125
4.2.2 Força Axial .....	130
<b>4.3 FORÇAS ÓPTICAS: EXPERIMENTO .....</b>	<b>132</b>
4.3.1 Calibrações .....	132
4.3.2 Ressonâncias.....	134
4.3.3 Forças Radiais .....	135
 <b>CAPÍTULO 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS _____</b>	 <b>141</b>

## **APÊNDICE A RELAÇÕES MATEMÁTICAS \_\_\_\_\_ 143**

A.1 HARMÔNICO ESFÉRICO.....	143
A.2 FUNÇÕES DE BESSEL .....	144
A.3 FUNÇÕES ESFÉRICAS DE BESSEL .....	145
A.4 POLINÔMIOS DE LEGENDRE .....	146
A.5 POLINÔMIOS DE LEGENDRE ASSOCIADO.....	147
A.6 INTEGRAIS .....	147

## **APÊNDICE B LENTE APLANÉTICA \_\_\_\_\_ 149**

## **APÊNDICE C PROGRAMAS NUMÉRICOS \_\_\_\_\_ 151**

C.1 VALIDAÇÃO DOS CAMPOS RADIAIS.....	151
C.2 PROGRAMA VALIDAÇÃO EXATO.NB .....	155
C.3 PROGRAMA VALIDAÇÃO REA.NB .....	158
C.4 FORÇAS RADIAIS.....	161
C.5 PROGRAMA FORÇAS RADIAIS.NB .....	162
C.6 PROGRAMA FORÇA AXIAL.NB .....	167

# Lista de Ilustrações

FIGURA 2.1 – CHOQUE ENTRE UM RAIOS E UM CENTRO ESPALHADOR. ....	14
FIGURA 2.2 – TRAJETÓRIA DOS RAIOS PARA $N_1 > N_2$ . ....	14
FIGURA 2.3 – TRAJETÓRIAS DOS RAIOS PARA $N_1 < N_2$ . ....	15
FIGURA 2.4 – FORÇAS E TRAJETÓRIAS DE DOIS RAIOS PARA O CASO $N_1 > N_2$ . ....	15
FIGURA 2.5 – FORÇAS E TRAJETÓRIAS DE DOIS RAIOS PARA O CASO $N_1 < N_2$ . ....	15
FIGURA 2.6 – EFEITO DA REFLEXÃO NA FORÇA ÓPTICA. ....	16
FIGURA 2.7 - OS CAMPOS INCIDENTES GERAM UM CAMPO INTERNO E ESPALHADO. ....	20
FIGURA 2.8 – SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO VERUS FATOR DE TAMANHO. ....	40
FIGURA 2.9 - UMA ONDA PLANA VIAJANDO NUM ÂNGULO PEQUENO $\theta$ EM RELAÇÃO AO EIXO ÓPTICO. ....	55
FIGURA 2.10 – DETALHES DA CONDIÇÃO SENO E LEIS DE INTENSIDADE DA ÓPTICA GEOMÉTRICA. ....	61
FIGURA 2.11 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SISTEMA APLANÉTICO E COORDENADAS UTILIZADAS. ....	62
FIGURA 2.12 – FOCALIZANDO PERTO DE UMA INTERFACE ....	69
FIGURA 2.13 - ILUSTRAÇÃO DA MUDANÇA DE SISTEMA DE COORDENADAS. ....	72
FIGURA 3.1 - MONTAGEM DO SISTEMA DE PINÇA ÓPTICA ....	101
FIGURA 3.2 - SISTEMA DE CONTROLE RADIAL DA POSIÇÃO DA PINÇA ÓPTICA. ....	104
FIGURA 3.3 - SISTEMA DE CONTROLE AXIAL DA POSIÇÃO DA PINÇA ÓPTICA ....	106
FIGURA 4.1 – MÓDULO DO CAMPO ELÉTRICO RADIAL. DA EQUERDA PARA DIRETITA TEMOS OS FATORES DE PREENCHIMENTO ( $F_0$ ) DE .177, 1.77 E 17.7 RESPECTIVAMENTE. (ACIMA) SIMULAÇÃO DO FEIXE PELA REA COM O FOCO EM (1.5,1.5,1.5) $\mu\text{m}$ . (ABAIXO) A RECONSTRUÇÃO DO FEIXE PELOS COEFICIENTES DE FORMA DO FEIXE ATÉ $N=30$ . ....	120
FIGURA 4.2 - MÓDULO DO CAMPO MAGNÉTICO RADIAL. DA EQUERDA PARA DIRETITA TEMOS OS FATORES DE PREENCHIMENTO ( $F_0$ ) DE .177, 1.77 E 17.7 RESPECTIVAMENTE. (ACIMA) SIMULAÇÃO DO FEIXE PELA REA	

COM O FOCO EM (1.5,1.5,1.5) $\mu\text{M}$ . (ABAIXO) A RECONSTRUÇÃO DO FEIXE PELOS COEFICIENTES DE FORMA DO FEIXE ATÉ $N=30$ . ....	121
FIGURA 4.3 - MÓDULO DO CAMPO ELÉTRICO RADIAL. DA ESQUERDA PARA DIREITA TEMOS OS FATORES DE PREENCHIMENTO ( $F_0$ ) DE .177, 1.77 E 17.7 RESPECTIVAMENTE. (ACIMA) SIMULAÇÃO DO FEIXE PELA REA COM O FOCO EM (1.5,1.5,0.0) $\mu\text{M}$ . (ABAIXO) A RECONSTRUÇÃO DO FEIXE PELOS COEFICIENTES DE FORMA DO FEIXE ATÉ $N=30$ . ....	122
FIGURA 4.4 - FATORES DE PREENCHIMENTO ( $F_0$ ) DE 1.77 COM O FOCO POSICIONADO NA ORIGEM. (ACIMA) SIMULAÇÃO DO FEIXE PELA REA. (ABAIXO) A RECONSTRUÇÃO DO FEIXE PELOS COEFICIENTES DE FORMA DO FEIXE ATÉ $N=30$ . (ESQUERDA) MÓDULO DO CAMPO ELÉTRICO RADIAL. (DIREITA) MÓDULO DO CAMPO ELÉTRICO RADIAL. ....	123
FIGURA 4.5 – RESSONÂNCIAS DE MIE EM MICROESFERAS DE POLIESTIRENO EM ÁGUA. ....	124
FIGURA 4.6 – FORÇA RADIAL VERSUS POSIÇÃO DO CENTRO DE UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $3\mu\text{M}$ . ....	125
FIGURA 4.7 - FORÇA RADIAL VERSUS POSIÇÃO DO CENTRO DE UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $3\mu\text{M}$ . ....	126
FIGURA 4.8 - FORÇA RADIAL VERSUS POSIÇÃO DO CENTRO DE UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $3\mu\text{M}$ . ....	127
FIGURA 4.9 - FORÇA RADIAL VERSUS POSIÇÃO DO CENTRO DE UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $3\mu\text{M}$ . ....	127
FIGURA 4.10 - FORÇA RADIAL VERSUS POSIÇÃO DO CENTRO DE UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $6\mu\text{M}$ . ....	128
FIGURA 4.11 - FORÇA RADIAL VERSUS POSIÇÃO DO CENTRO DE UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $9\mu\text{M}$ . ....	129
FIGURA 4.12 - FORÇA RADIAL VERSUS POSIÇÃO DO CENTRO DE UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $9\mu\text{M}$ . ....	129
FIGURA 4.13 - FORÇA AXIAL EM UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $3\mu\text{M}$ . ....	130
FIGURA 4.14 - FORÇA AXIAL EM UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $6\mu\text{M}$ . ....	131
FIGURA 4.15 - FORÇA AXIAL EM UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE $9\mu\text{M}$ . ....	131
FIGURA 4.16 – POTÊNCIA APÓS A OBJETIVA EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO DE ONDA DO Ti:SAFIRA. ....	132
FIGURA 4.17 – CALIBRAÇÃO RADIAL - DESLOCAMENTO DO MOTOR ACOPLADO AO GIMBAL MOUNT MEDIDO COM RELAÇÃO AO DESLOCAMENTO DO ESTÁGIO PRIORI DO MICROSCÓPIO. ....	133
FIGURA 4.18 - CALIBRAÇÃO AXIAL - DESLOCAMENTO DO MOTOR DE PASSO CONTROLANDO O TELESCÓPIO MEDIDA COM RELAÇÃO AO DESLOCAMENTO DO FOCO DO MICROSCÓPIO. ....	133
FIGURA 4.19 - RESSONÂNCIAS DE MIE UTILIZANDO A FORÇA DA PINÇA PARA UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE 9 MICROS DE DIÂMETRO. ....	134
FIGURA 4.20 – FORÇA RADIAL PARALELA À POLARIZAÇÃO MEDIDA (PONTOS) COMPARADOS COM A TEORIA PARA UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE 3 MICROS DE DIÂMETRO. ....	136

FIGURA 4.21 - FORÇA RADIAL PERPENDICULAR À POLARIZAÇÃO MEDIDA (PONTOS) COMPARADOS COM A TEORIA PARA UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE 3 MICROS DE DIÂMETRO. ....	136
FIGURA 4.22 - FORÇA RADIAL PARALELA À POLARIZAÇÃO MEDIDA (PONTOS) COMPARADOS COM A TEORIA PARA UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE 6 MICROS DE DIÂMETRO. ....	137
FIGURA 4.23 - FORÇA RADIAL PERPENDICULAR A POLARIZAÇÃO MEDIDA (PONTOS) COMPARADOS COM A TEORIA PARA UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE 6 MICROS DE DIÂMETRO. ....	137
FIGURA 4.24 - FORÇA RADIAL MEDIDA (PONTOS) COMPARADOS COM A TEORIA PARA UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE 9 MICROS DE DIÂMETRO. ....	138
FIGURA 4.25 - FORÇA AXIAL COMPARADOS COM A TEORIA ( $F_o=1.77$ ) PARA UMA MICROESFERA DE POLIESTIRENO DE 9 MICROS DE DIÂMETRO. ....	138
FIGURA 4.26 - FORÇA AXIAL EXPERIMENTAL PARA DIFERENTES POTÊNCIAS. ....	139
FIGURA B.1 – ILLUSTRACÃO DA CONDIÇÃO SENO DE ABBE .....	149




# Lista de abreviaturas e siglas

3D	Tri-dimensional
AIL	Aproximação Integral Localizada
CCD	<i>Charge coupled device</i>
CPU	<i>Central Processing Unit</i>
cw	<i>Continuous wave</i>
DI	<i>De-Ionized</i>
DNA	<i>Deoxyribonucleic acid</i>
EM	Eletromagnético
GLMT	<i>Generalized Lorenz-Mie Theory</i>
IR	<i>Infra Red</i>
MDR	<i>Morphology dependent resonance</i>
NA	<i>Numerical aperture</i>
Nd:YAG	<i>Neodymium: Yttrium Aluminum Garnet</i>
PMT	<i>Photomultiplier tube</i>
REA	Representação do Espectro Angular
TE	<i>Transverse electric mode</i>
TEM	<i>Transverse electric-magnetic mode</i>
TGLM	Teoria Generalizada de Lorenz-Mie

TLM	Teoria Lorenz-Mie
TM	<i>Transverse magnetic mode</i>
TPA	<i>Two Photon Absorption</i>
WGM	<i>Whispering gallery mode</i>

# Capítulo 1

## Introdução

 aprisionamento óptico é baseado na teoria de pressão de radiação. Em 1609 o astrônomo alemão Johannes Kepler observou que a cauda dos cometas sempre apontava para o lado oposto ao do Sol, sugerindo que o Sol estava produzindo um tipo de pressão de radiação. Kepler então afirmou que talvez fosse possível viajar da Terra à Lua somente utilizando essa força da radiação. Mesmo parecendo fictício hoje, o conceito da luz exercendo uma pressão é realidade, permitindo o aprisionamento óptico. A idéia de pressão de radiação foi formalizada por James Clerk Maxwell em 1873, que determinou que as forças são geradas quando a luz é refletida, refratada ou absorvida. Lebedev (1901) foi o primeiro a medir a pressão da luz, confirmando assim as previsões baseadas nas equações de Maxwell.

Quase cem anos depois de Maxwell, no início dos anos 70, demonstrou-se experimentalmente que partículas dielétricas podem ser manipuladas e aprisionadas

por meio da pressão de radiação (Ashkin, 1970 e 1999). Em meados dos anos 80, Ashkin introduziu outro avanço quando utilizou um único feixe focalizado por uma lente de grande abertura numérica para capturar partículas em três dimensões (Ashkin, 1986). Esta técnica se tornou conhecida como *Optical Tweezers* ou Pinça Óptica. Suas aplicações nas ciências da vida e biofísica cresceram exponencialmente após a demonstração de que ela permitia manter vivos por longos tempos microorganismos capturados, se os efeitos térmicos fossem evitados com lasers no infravermelho (Ashkin, 1987).

Já se demonstrou o aprisionamento óptico com luz de comprimentos de onda do visível ao infravermelho e com potências de algumas dezenas de miliwatts até watts (Wright, 1994; Simmons, 1996). Para não danificar as células, ou tecidos biológicos capturados, o ideal é utilizar comprimentos de onda nos quais a absorção da partícula capturada e do meio em que está suspensa seja muito pequena. A região do infravermelho próximo entre 800 a 1300 nm representa a janela de baixa absorção para a maioria dos materiais biológicos, longe das absorções dos níveis eletrônicos do visível e ultravioleta e também dos níveis vibracionais no infravermelho mais longínquo. A água, presente na totalidade dos microorganismos, apresenta forte absorções na região de 2700 nm e seu harmônico entre 1300-1400 nm. Por esse aspecto o laser de Nd:YAG emitindo em 1064 nm tem sido um dos preferidos nas aplicações de pinças ópticas em ciências da vida.

## 1.1 Aplicações Biológicas

Vários aspectos das pinças ópticas a tornam uma ferramenta muito importante nas ciências da vida. O primeiro deles é sua capacidade de manipulação e mensuração remota não destrutiva, uma vez que utiliza apenas luz, em tempo real. A pinça óptica tem sido utilizada em duas vertentes, manipulação direta de microorganismos e medidas de propriedades mecânicas. Como uma ferramenta de manipulação ela foi

utilizada para inserir DNA's dentro de diferentes tipos de células, para conectar DNA ao silício na tentativa de construção de uma interface biomecânica e para fertilizações *in vitro* (Shivashankar, 1997). Como ferramenta de manipulação, entretanto, a despeito das vantagens relativas à esterilidade e manipulação remota, existem outras ferramentas, como micromanipuladores, que podem realizar a mesma tarefa.

Acreditamos, que a grande vantagem da ferramenta pinça óptica advém da sua utilização como ferramenta de medida de propriedades mecânicas. Os fenômenos importantes para manutenção da vida acontecem em dois planos, o bioquímico e o mecânico. No plano mecânico os microorganismos precisam se movimentar e se deformar, encontrar alimentos, fugir de substâncias nocivas, aderir a membranas e paredes celulares, etc., para os quais utiliza a energia fornecida por reações bioquímicas. Além disso, processos de reconhecimento bioquímico disparam uma série de eventos mecânicos. Enquanto a bioquímica de microorganismos tem sido extensivamente estudada o mesmo não se pode afirmar da sua contrapartida mecânica, pela falta de uma ferramenta não destrutiva e com sensibilidade para realizar essas observações. Nesse aspecto as pinças ópticas preenchem uma lacuna centenária. Também permite disparar eventos biológicos através da sua capacidade de micromanipulação. Como se trata de uma técnica que utiliza apenas luz, ela pode ser implementada em conjunto com novas microscopias e microespectroscopias, para estudar simultaneamente e em tempo real os eventos mecânicos e bioquímicos em microorganismos vivos.

As intensidades das forças envolvidas na interação ao nível celular são da ordem de pico a femto Newtons, devido ao tamanho microscópico das partículas que interagem. Um cubo de 1  $\mu\text{m}$  de lado com densidade igual à da água ( $10^3 \text{ kg/m}^3$ ) tem massa de  $m = (10^{-6})^3 \times 10^3 = 10^{-15} \text{ kg}$ . Forças de picoNewtons nesse caso implicam em acelerações de  $1000 \text{ m/s}^2$ . As forças de moléculas motoras tais como cinesina e miosina variam entre 7 a 9 pN. Forças envolvidas em deformações viscoelásticas de membranas podem ser tão pequenas quanto dezenas de femtoNewtons. Forças na faixa de 20 fN a 200 pN podem ser medidas com relativa facilidade através das pinças ópticas. Abaixo de 20 fN são necessárias técnicas especiais para cancelar ruídos e

as potências ópticas envolvidas para medidas de forças acima de 200 pN tendem a danificar termicamente o objeto de estudo.

A pinça óptica foi utilizada para medir e comparar deslocamentos celulares e forças de miosinas cardíacas (Sugiura, 1998), para caracterização de motores biológicos moleculares (Thomas, 1998) e rigidez flexural de um microtúbulo (Felgner, 1996), para medir o comprimento de uma molécula de DNA (Sakata- Sogawa, 1998), para medir a motilidade de espermatozóides humanos (Berns, 1998; Koning, 1996), forças de impulsão de flagelos (Chen, 2000; Berry, 1997; Block, 1989 e 1991), forças de adesão (Mullman, 1999, Liang, 2000), dinâmica e interação coloidal (Verma, 1999), estudos de força e flexibilidade de grandes moléculas como filamentos de actina e de DNA (Arai, 1999; Perkins, 1994), forças de longo alcance entre células e superfícies (Dickinson, 2000) e permitiu a observação da ausência de travamento do movimento de rotação reversa de flagelos motores de bactérias (Berry, 1997). A pinça óptica também foi utilizada para avaliar as forças de ligações de microesferas cobertas por proteína, em uma célula motora, relacionando estas forças aos vários graus de ligações entre os receptores de integrina e citoesqueleto (Nishizaka, 2000; Schmidt, 1993) e em estudos de adesão em células mamárias utilizando superfícies cobertas de receptores (Stout, 2001).

Além de estudos envolvendo adesão, a pinça óptica também foi utilizada para detectar concentrações ao nível de femtomolar de antígenos (Helmerson, 1997) e medir as propriedades mecânicas de membranas (Baumann, 2000; Dai, 1999; Henon, 1999; Raucher, 1999; Dai, 1995) e moléculas (Wuite, 2000; Wang, 1997; Kuo, 1995). Esta abordagem pode ser utilizada para investigar as forças geradas pelos movimentos de células (Patrizio, 2000; Galbraith, 1999) ou moléculas (Davenport, 2000; Kuo, 1993; Edidin, 1991; Block, 1990). Todas essas medidas requerem um transdutor de força, para o qual se utiliza o deslocamento de uma microesfera capturada.

É nesse contexto que se encaixa esse trabalho de tese. Não existe consenso entre as teorias das forças nas pinças ópticas nem para sistemas de alta simetria como microesferas, muito menos em geometrias mais complicadas. Uma das maiores dificuldades encontradas nesse aspecto é a ausência de boas medidas

experimentais, independentes de modelos, das forças ópticas. Por isso grande parte do trabalho dessa tese foi o desenvolvimento de um sistema de medidas de forças ópticas, utilizando pinças duplas para obtenção de toda uma curva da força em função do deslocamento tridimensional da partícula capturada, e não apenas os valores da força em posições fixas. A segunda grande contribuição vem da descrição teórica da força óptica. A grande dificuldade nesse aspecto é a descrição do feixe incidente nas condições da pinça, com feixes de grande abertura numérica, e sua decomposição em ondas parciais. Acreditamos ter dado uma contribuição extremamente valiosa quando conseguimos resolver de forma analítica e exata o problema da decomposição de um feixe convergente de Richards (1959) e Wolf (1959) em ondas parciais relativas a qualquer origem do sistema de coordenadas em três dimensões. A seguir apresentamos uma descrição rápida do contexto histórico em que esse trabalho se desenvolveu dentro do grupo na UNICAMP.

## 1.2 Histórico do Grupo

O trabalho com pinças ópticas no grupo da Unicamp, e no Brasil, se iniciou após o retorno do Prof. Carlos Lenz Cesar de seu Pós-doutorado no AT&T Bell Laboratories onde tomou conhecimento dos trabalhos nessa área diretamente com seu pioneiro, o Dr. Arthur Ashkin, em 1990.

Desde então o Grupo desenvolveu várias técnicas de manipulação e medida com a pinça óptica em colaborações com o Hemocentro para a caracterização da elasticidade de hemácias. Ser altamente deformável é uma característica importante das hemácias, pois o glóbulo vermelho normal é uma célula em forma de disco bicôncavo, com um diâmetro entre 7 a 10 $\mu\text{m}$ , que tem que transpor capilares e sinusóides do baço, com diâmetros de apenas 3 a 4 $\mu\text{m}$ . Por isso essas células podem se alongar até 230% da sua dimensão original. A perda ou diminuição dessa capacidade de deformação, leva a uma retirada prematura das hemácias da

circulação e, conseqüentemente, à diminuição da oferta de oxigênio aos tecidos. Esta situação patológica é encontrada em algumas anemias hereditárias, por exemplo, na esferocitose, anemia falciforme e eliptocitose. Por isso decidimos usar o método desenvolvido para medida de elasticidade no estudo dessas doenças como anemia falciforme em homozigotos, com e sem tratamento com hidroxiuréia e em crise falcêmica; anemia falciforme em heterozigotos, traço falcêmico e esferocitose hereditária. Também estudamos doenças não hereditárias, como anemia ferropriva, e a evolução da elasticidade de bolsas de sangue irradiadas em função do tempo de estocagem. Um sistema de pinça dupla permitiu realizar observações sobre as forças de adesão de hemácias além de medidas da viscosidade da membranas das mesmas (Brandão, 2003).

Em colaboração com o Instituto de Biologia da Unicamp utilizou-se a pinça óptica para determinar a força de impulsão do flagelo dos promastigotas de *Leishmania amazonensis* entre 0,7 e 1,5pN, chegando a um mínimo de 0,5pN, após montagem de um sistema com sensibilidade para medir forças de até 20fN no limite dado pelo movimento Browniano das partículas aprisionadas.

Em 2002 incorporamos à pinça óptica um sistema *homemade* de microespectroscopia e reconstrução espectroscópica de imagens capaz de observar espalhamentos Raman, Hiper-Raman, Hiper-Rayleigh e luminescência excitada por absorção de dois fótons (*Two Photon Absorption* - TPA) de partículas capturadas pela pinça óptica. Essas medidas de espalhamento mostraram a presença de ressonâncias de Mie nas microesferas capturadas (Fontes, 2005a).

Percebendo a sensibilidade da interação radiação/matéria da força óptica propusemos uma nova técnica de espectroscopia que denominamos espectroscopia de força óptica. Nessa técnica uma microesfera capturada por um laser de Nd:YAG é tirada da posição de equilíbrio por um laser de Ti:safira cw sintonizável. Esse deslocamento é medido em função do comprimento de onda do laser perturbador para a aquisição dos espectros de força óptica. As ressonâncias de Mie foram novamente observadas nessa espectroscopia incluindo regras de seleção para a excitação de diferentes modos da microcavidade esférica (Fontes, 2005b). Para explicar esses resultados foi necessário substituir o modelo de óptica geométrica por



um modelo eletromagnético mais completo; de forma similar à de Neto (2000) e Mazolli (2003), seguindo o trabalho de Richards (1959) e Wolf (1959). Mas, com a diferença de poder lidar com feixes de polarização arbitrária ao invés de feixes apenas circularmente polarizados, única forma de excitação seletiva dos modos TE e TM. Os resultados de espectroscopia de força foram bem descritos utilizando a aproximação paraxial do feixe incidente como um feixe Gaussiano de Davis-Barton (Davis, 1979; Barton, 1989). A aproximação paraxial traz as seguintes complicações:

- (1) Somente a totalidade dos termos da expansão de Davis-Barton satisfaz às equações de Maxwell. Entretanto, a série é truncada, usualmente na terceira (e raramente na quinta) ordem;
- (2) O erro aumenta com a abertura numérica do feixe incidente, sendo inadmissível para altas aberturas numéricas utilizadas nas pinças ópticas;
- (3) A profundidade aparente (*focal shift*) da posição do foco, devido à interface vidro água, não é levada em consideração;
- (4) Desconsidera a difração do feixe gaussiano incidente na abertura, o que fornece uma representação fictícia dos campos eletromagnéticos na região focal.

Nesse momento ficou claro que a medida do deslocamento da partícula em função da posição do feixe perturbador, em lugar do seu comprimento de onda, seria a ferramenta ideal para medida de curvas de força em três dimensões, necessária para a caracterização da força óptica. Grande parte dessas contribuições foram parte da tese de Doutorado da Dra. Adriana Fontes (Fontes, 2004), que incluiu medidas preliminares da força óptica em função da posição radial, mas sem precisão suficiente para a comparação com modelos sofisticados de forças ópticas.

A continuidade desse trabalho requeria (1) translação radial precisa do feixe perturbador, (2) translação axial e (3) um modelo de feixe incidente adequado às objetivas de grande abertura numérica.

Assim as grandes contribuições do trabalho aqui desenvolvido são listadas abaixo:

- Desenvolvemos um sistema altamente preciso e automatizado de posicionamento do feixe tanto no plano focal quanto no axial, desenvolvendo os procedimentos para sua calibração.
- Com esse sistema realizamos medidas precisas das curvas de força óptica em função da posição em três dimensões e outras variáveis como polarização e comprimento de onda.
- Substituímos o modelo do feixe incidente de Davis-Barton (Davis, 1979; Barton, 1989), por um modelo de Representação de Espectro Angular e mostramos que é possível fazer uma decomposição desse feixe em ondas parciais de forma exata em lugar da Aproximação da Integral Localizada de Gouesbet (Gouesbet, 1999) e colaboradores utilizada anteriormente. Trata-se de uma generalização que também permite obter a decomposição de feixes de Davis para aberturas numéricas pequenas. Por outro lado, descreve bem os efeitos de difração devido ao sobre preenchimento da abertura da objetiva.
- Encontramos uma solução analítica para integral do tipo

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta P_n^m(\cos\theta) e^{iR\cos\alpha\cos\theta} J_m(R\sin\alpha\sin\theta) = 2i^{n-m} P_n^m(\cos\alpha) j_n(R)$$

fundamental para a decomposição em ondas parciais. Até onde sabemos esse resultado não estava tabelado e nem disponível.

No capítulo 2 descrevemos o desenvolvimento da teoria da força óptica. No capítulo 3 descrevemos os sistemas experimentais e as soluções dadas para os problemas encontrados. No capítulo 4 apresentamos os resultados obtidos e suas interpretações, terminando com as conclusões e perspectivas de continuidade desse trabalho.

## 1.3 Referências Bibliográficas

- Arai, Y.; Yasuda, R.; Akashi, K.; Harada, Y.; Miyata, H.; Kinoshita K. Jr.; Itoh, H. Tying a molecular knot with optical tweezers. **Nature**, 399(6735):446-448, 1999.
- Ashkin, A. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. **Phys Rev Lett**, 24:156-159, 1970.
- Ashkin, A. Optical Trapping and Manipulation of Neutral Particles Using Lasers. **Opt Pho New**, 10(5):41-46, 1999.
- Ashkin, A.; Dziedzic, J.M.; Bjorkholm, J.E.; Schu, S. Observation of a Single-Beam Gradient Force Optical Trap for Dielectric Particles. **Opt Lett**, 11(5):288-290, 1986.
- Ashkin, A.; Dziedzic, J.M.; Yamane, T. Optical Trapping and Manipulation of Single Cells Using Infrared-Laser Beams. **Nature**, 330(6150):769-771, 1987.
- Barton, J.P.; Alexander, D.R. 5Th-Order Corrected Electromagnetic-Field Components for a Fundamental Gaussian-Beam. **J Appl Phys**, 66(7):2800-2802, 1989.
- Baumann, C.G.; Bloomfield, V.A.; Smith, S.B.; Bustamante, C.; Wang, M.D.; Block, S.M. Stretching of single collapsed DNA molecules. **Biophys J**, 78(4):1965-1978, 2000.
- Berns, M.W. Laser scissors and tweezers. **Sci Am**, 278(4):62-68, 1998.
- Berry, R.M.; Berg, H.C. Absence of a barrier to backwards rotation of the bacterial flagellar motors demonstrated with optical tweezers. **Proc Natl Acad Sci USA**, 94(26):14433-14437, 1997.
- Block, S.M.; Blair, D.F.; Berg, H.C. Compliance of bacterial flagella measured with optical tweezers. **Nature**, 338(6215):514-518, 1989.
- Block, S.M.; Blair, D.F.; Berg, H.C. Compliance of bacterial polyhooks measured with optical tweezers. **Cytometry**, 12(6):492-496, 1991.
- Block, S.M.; Goldstein, L.S.; Schnapp, B.J. Bead movement by single kinesin molecules studied with optical tweezers. **Nature**, 348(6299):348-352, 1990.
- Brandão, M.M.; Fontes, A.; Barjas-Castro, M.L.; Barbosa, L.C.; Costa, F.F.; Cesar, C.L.; Saad, S.T.O. Optical tweezers for measuring red blood cell elasticity: application to the study of drug response in sickle cell disease. **Eur J Haematol**, 70(4):207-211, 2003.
- Chen, A.; Moy, V.T. Cross-linking of cell surface receptors enhances cooperativity of molecular adhesion. **Biophys J**, 78(6):2814-2820, 2000.
- Dai, J.; Sheetz, M.P. Mechanical properties of neuronal growth cone membranes studied by tether formation with laser optical tweezers. **Biophys J**, 68(3):988-996, 1995.

- Dai, J.; Sheetz, M.P. Membrane tether formation from blebbing cells. **Biophys J**, 77(6):3363-3380, 1999.
- Davenport, R.J.; Wuite, G.J.; Landick, R.; Bustamante, C. Single-molecule study of transcriptional pausing and arrest by *E. coli* RNA polymerase. **Science**, 287(5462):2497-2500, 2000.
- Davis, L. W. Theory of Electromagnetic Beams. **Phys Rev A**, 19(3):1177-1179, 1979.
- Dickinson, R.B.; Clapp, A.R.; Truesdail, S.E. Handbook of Bacterial Adhesion: Principles, Methods and Applications. An, Y.H.; Friedman, R.J. (eds.) pp.29-306 (Humana Press, Totowa, 2000)
- Edidin, M.; Kuo, S.C.; Sheetz, M.P. Lateral movements of membrane glycoproteins restricted by dynamic cytoplasmic barriers. **Science**, 254(5036):1379-1382, 1991.
- Felgner, H.; Frank, R.; Schliwa, M. Flexural rigidity of microtubules measured with the use of optical tweezers. **J Cell Sci**, 109:509-516, 1996.
- Fontes, A. Sistema de Micromanipulação e Microanálise com Pinças Ópticas. 2004. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- Fontes, A.; Ajito, K.; Neves, A.A.R.; Moreira, W.L.; de Thomaz, A.A.; Barbosa, L.C.; de Paula, A.M.; Cesar, C.L. Raman, hyper-Raman, hyper-Rayleigh, two-photon luminescence and morphology-dependent resonance modes in a single optical tweezers system. **Phys Rev E**, 72(1):012903, 2005a.
- Fontes, A.; Neves, A.A.R.; Moreira, W.L.; de Thomaz, A.A.; Barbosa, L.C.; Cesar, C.L.; de Paula, A.M. Double optical tweezers for ultrasensitive force spectroscopy in microsphere Mie scattering. **Appl Phys Lett**, 87(22):221109, 2005b.
- Galbraith, C.G.; Sheetz, M.P. Keratocytes pull with similar forces on their dorsal and ventral surfaces. **J Cell Biol**, 147(6):1313-1323, 1999.
- Gouesbet, G. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz–Mie theory for spheres. **J Opt Soc Am A**, 16(7):1641-1650, 1999.
- Helmerson, K.; Kishore, R.; Phillips, W.D. Optical tweezers-based immunosensor detects femtomolar concentrations of antigens. **Clin Chem**, 43(2):379-383, 1997.
- Henon, S.; Lenormand, G.; Richert, A.; Gallet, F. A new determination of the shear modulus of the human erythrocyte membrane using optical tweezers. **Biophys J**, 76(2):1145-1151, 1999.
- Koning, K.; Svaasand, L.; Liu, Y.G.; Sonek, G.; Patrizio, P.; Tadir, Y.; Berns, M.W.; Tromberg, B.J. Determination of motility forces of human spermatozoa using an 800 nm optical trap. **Cell Mol Biol**, 42(4):501-509, 1996.
- Kuo, S.C.; Ramanathan, K.; Sorg, B. Single kinesin molecules stressed with optical tweezers. **Biophys J**, 68(4):S74, 1995.
- Kuo, S.C.; Sheetz, M.P. Force of single kinesin molecules measured with optical tweezers. **Science**, 260(5105):232-234, 1993.

- Lebedev, P. N. Experimental examination of light pressure. **Ann. der Physik**, 6:433, 1901.
- Liang, M.N.; Smith, S.P.; Metallo, S.J.; Choi, I.S.; Prentiss, M.; Whitesides, G.M. Measuring the forces involved in polyvalent adhesion of uropathogenic *Escherichia coli* to mannose-presenting surfaces. **Proc Natl Acad Sci USA**, 97(24):13092-13096, 2000.
- Mazolli, A.; Neto, P.A.M.; Nussenzveig, H.M. Theory of trapping forces in optical tweezers. **Proc R Soc Lon Ser A**, 459 (2040):3021-3041, 2003.
- Mullman, K.L.; Kishore, R.; Helmerson, K.; Phillips, W.D. OSA Annual Meeting Santa Clara (1999)
- Neto, P.A.M.; Nussenzveig, H.M. Theory of optical tweezers. **Europhys Lett**, 50(5):702-708, 2000.
- Nishizaka, T.; Seo, R.; Tadakuma, H.; Kinoshita, K. Jr.; Ishiwata, S. Characterization of single actomyosin rigor bonds; load dependence of lifetime and mechanical properties. **Biophys J**, 79(2):962-974, 2000.
- Patrizio, P.; Liu, Y.; Sonek, G.J.; Berns, M.W.; Tadir, Y. Effect of pentoxifylline on the intrinsic swimming forces of human sperm assessed by optical tweezers. **J Androl**, 21(5):753-756, 2000.
- Perkins, T.T.; Quake, S.R.; Smith, D.E.; Chu, S. Relaxation of a single DNA molecule observed by optical microscopy. **Science**, 264(5160):822-826, 1994.
- Raucher, D.; Sheetz, M.P. Characteristics of a membrane reservoir buffering membrane tension. **Biophys J**, 77(4):1992-2002, 1999.
- Richards, B.; Wolf, E. Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. 2. Structure of the image field in an aplanatic system, **Proc R Soc Lon Ser A**, 253(1274):358-379, 1959.
- Sakata-Sogawa, K.; Kurachi, M.; Sogawa, K.; Fujii-Kuriyama, Y.; Tashiro, H. Direct measurement of DNA molecular length in solution using optical tweezers: detection of looping due to binding protein interactions. **Eur Biophys J Biophys**, 27(1):55-61, 1998.
- Schmidt, C.E.; Horwitz, A.F.; Lauffenburger, D.A.; Sheetz, M.P. Integrin-cytoskeletal interactions in migrating fibroblasts are dynamic, asymmetric, and regulated. **J Cell Biol**, 123(4):977-991, 1993.
- Shivashankar, G.V.; Libchaber, A. Single DNA molecule grafting and manipulation using a combined atomic force microscope and an optical tweezer. **Applied Physics Letters**, 71(25):3727-3729, 1997.
- Simmons, R.M.; Finer, J.T.; Chu, S.; Spudich, J.A. Quantitative measurements of force and displacement using an optical trap. **Biophys J**, 70(4):1813-1822, 1996.
- Stout, A.L. Detection and characterization of individual intermolecular bonds using optical tweezers. **Biophys J**, 80(6):2976-2986, 2001.

Sugiura, S.; Kobayakawa, N.; Fujita H.; Yamashita, H.; Momomura, S.; Chaen, S.T.; Omata, M.; Sugi, H. Comparison of unitary displacements and forces between 2 cardiac myosin isoforms by the optical trap technique - Molecular basis for cardiac adaptation, **Circ Res**, 82(10):1029-1034, 1998.

Thomas, N.; Thornhill, R.A. The physics of biological molecular motors, **J Phys D**, 31(3):253-266, 1998.

Verma, R.; Crocker, J.C.; Weeks, E.; Yohd, A.G. OSA Annual Meeting Santa Clara (1999)

Wang, M.D.; Yin, H.; Landick, R.; Gelles, J.; Block, S.M. Stretching DNA with optical tweezers. **Biophys J**, 72(3):1335-1346, 1997.

Wolf, E. Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. 1. An integral representation of the image field, **Proc R Soc Lon Ser A**, 253(1274):349-357, 1959.

Wright, W.H.; Sonek, G.J.; Berns, M.W. Parametric Study of the Forces on Microspheres Held by Optical Tweezers. **App Opt**, 33(9):1735-1748, 1994.

Wuite, G.J.; Davenport, R.J.; Rappaport, A.; Bustamante, C. An integrated laser trap/flow control video microscope for the study of single biomolecules. **Biophys J**, 79(2):1155-1167, 2000.

# Capítulo 2

## Teoria

*"A physicist's behaviour towards Mathematics is similar to the attitude of an intelligent thief towards the criminal law: he studies it just as necessary to avoid punishment".*  
I.M. Gelfand (1913-)

Arthur Ashkin foi pioneiro no campo de pinças ópticas nos anos 70. Ele demonstrou que forças ópticas podem deslocar e levitar micro partículas em diferentes ambientes (Ashkin, 1971). O aprisionamento com um único feixe foi demonstrado primeiramente em 1986 por Ashkin e colaboradores (Ashkin, 1986). Nos últimos anos a técnica amadureceu e atualmente é utilizada em várias aplicações em áreas como biologia, química e física (Ashkin, 2000). As idéias intuitivas iniciais sobre o princípio de funcionamento da pinça óptica, apesar de quantitativamente inacuradas, são muito valiosas até para o entendimento da terminologia utilizada e para identificar os fatores, variáveis e limitações importantes

da técnica de pinças ópticas. Por isso iniciamos esse capítulo com a descrição dessas idéias.

A primeira idéia intuitiva fundamental é a da transferência de momento dos fótons de um raio de luz. Suponha um raio que, devido à refração de um centro espalhador mude de direção conforme a Figura 2.1. O centro espalhador portanto percebe um impulso na direção da bissetriz do ângulo entre os fótons incidentes e refratados, como se fosse um choque entre partículas.

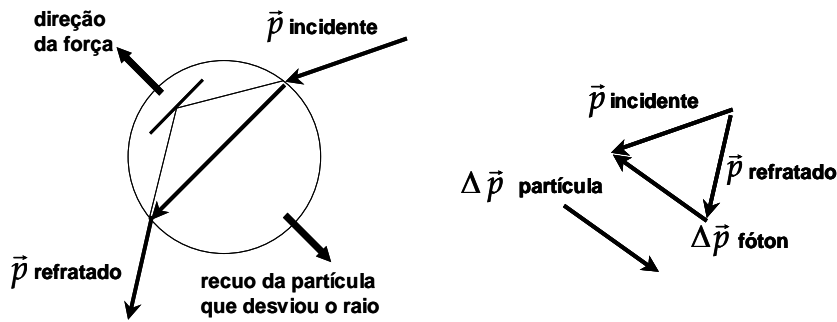


Figura 2.1 – Choque entre um raio e um centro espalhador.

A captura da partícula pode ser entendida através da análise da trajetória de um raio que passaria pelo ponto  $z_0$  na ausência da refração do centro espalhador. A Figura 2.2 e Figura 2.3 mostram como o raio é desviado em quatro situações distintas: com  $z_0$  acima e abaixo do centro da esfera cujo índice de refração é maior ou menor do que o do meio em que está suspensa. Onde  $n_1$  é o índice de refração da esfera e  $n_2$  é o índice de refração do meio externo.

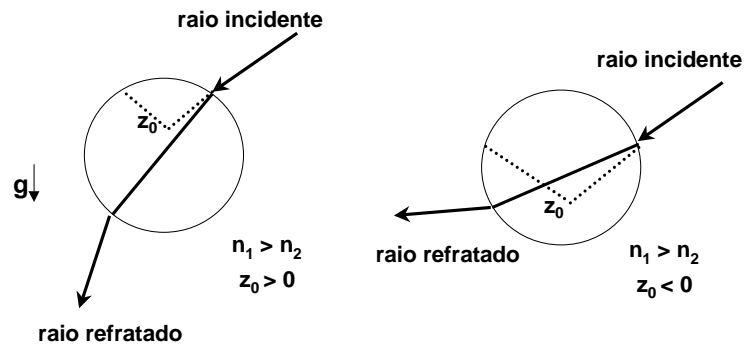


Figura 2.2 – Trajetória dos raios para  $n_1 > n_2$ .



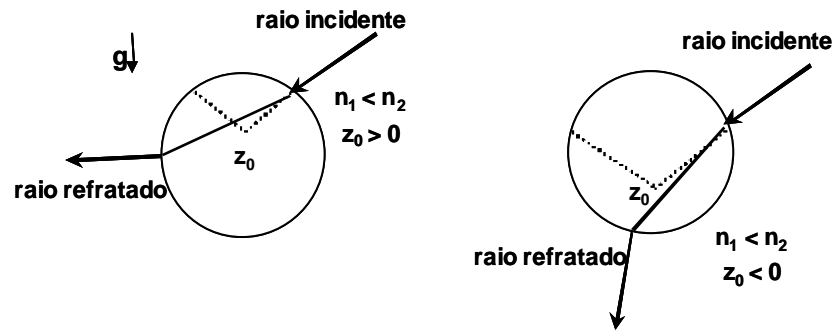


Figura 2.3 – Trajetórias dos raios para  $n_1 < n_2$ .

Considerando agora dois raios simétricos percebe-se que a força óptica no caso em que  $n_1 > n_2$ , tende a trazer o centro da esfera para o foco do laser, capturando-a, enquanto a situação oposta,  $n_1 < n_2$ , tende a expulsar a esfera.

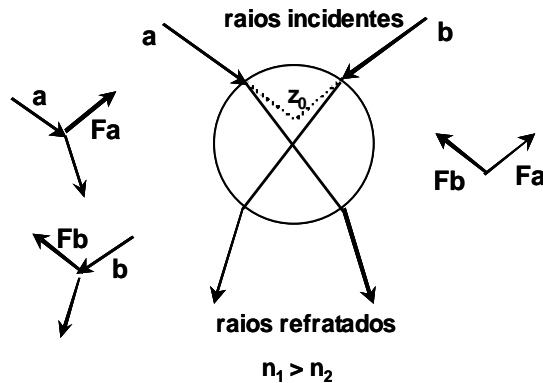


Figura 2.4 – Forças e trajetórias de dois raios para o caso  $n_1 > n_2$ .

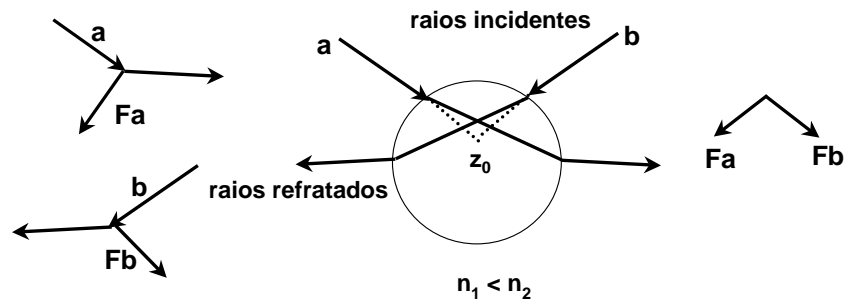


Figura 2.5 – Forças e trajetórias de dois raios para o caso  $n_1 < n_2$ .

A Figura 2.6 dá uma idéia intuitiva sobre o fato de que as reflexões tendem a expulsar a esfera do foco do laser. Só existirá pinça óptica portanto, inclusive contrária à gravidade, quando a força da refração, também conhecida como força de

gradiente, for maior do que a força de reflexão, também conhecida como força de espalhamento.

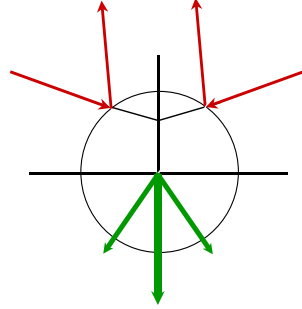


Figura 2.6 – Efeito da reflexão na força óptica.

Daí percebe-se a contradição do índice de refração relativo entre esfera e o meio em que está suspensa. Por um lado, quanto maior a diferença dos índices, maior a refração e maior o gradiente da força. Por outro lado o aumento do coeficiente de reflexão, (grosseiramente dado por  $R = [(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)]^2$ ) gera um diferencial muito grande impedindo a operação da pinça óptica.

A terminologia força de gradiente e de espalhamento pode ser melhor entendida no regime de espalhamento de Rayleigh, no qual a dimensão da partícula é muito menor do que o comprimento de onda da radiação incidente. Nesse caso a partícula funciona como um dipolo induzido cuja força na presença de um campo eletromagnético externo é dada por (Gordon, 1973):

$$\vec{F}_{grad} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \times \vec{B}, \quad (2.1)$$

onde  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$  é o momento de dipolo induzido da partícula. Assim:

$$\vec{F}_{grad} = \alpha \left[ (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right]. \quad (2.2)$$

Utilizando a identidade vetorial  $(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} = \nabla\left(\frac{E^2}{2}\right) - \vec{E} \times \nabla \times \vec{E}$  e a equação de Maxwell

$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  podemos reescrever a equação (2.2) como:

$$\vec{F}_{grad} = \alpha \left[ \nabla \left( \frac{E^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right]. \quad (2.3)$$

Tomando a média temporal na presença de um feixe de laser contínuo o termo com derivada temporal se anula e a força óptica é proporcional ao gradiente da intensidade do campo eletromagnético:

$$\langle \vec{F}_{grad} \rangle = \frac{\alpha}{2} \nabla \langle E^2 \rangle. \quad (2.4)$$

Das teorias de absorção e espalhamento por pequenas partículas, a mais importante delas de solução exata é a de uma esfera de raio e índice de refração arbitrário. A busca pela teoria deste fenômeno início-se quase cem anos atrás por Gustav Mie (1908) num empenho para entender as várias cores na absorção e espalhamento por partículas coloidais de ouro suspensas em água. No mesmo período Peter Debye (1909) considerou o problema de pressão de radiação exercida sobre uma pequena partícula no espaço. Porém nem Mie nem Debye foram os pioneiros em construir uma solução ao problema da esfera, foi Lorenz em 1890 que deu a descrição matemática do espalhamento utilizando a sua própria teoria eletromagnética ao invés daquela de Maxwell (Kerker, 1969). Iremos portanto denominar a teoria da absorção e espalhamento de uma esfera por uma onda plana pelo termo de Teoria Lorenz-Mie (TLM).

Essa força tende a capturar a partícula no foco do laser, onde a intensidade é máxima, se  $\alpha$  for positivo. A polarizabilidade da partícula ( $\alpha$ ) é fornecida pela equação 4.60 do Jackson (1999)  $\alpha = n_m^2 r^3 (n_1^2 - n_2^2) / (n_1^2 + 2n_2^2)$  (Svoboda, 1994). Daí se percebe novamente que se  $n_1 > n_2$  a força é atrativa e que se  $n_2 > n_1$  a força é

repulsiva. Também se percebe que a força de gradiente cai com  $r^3$ , à medida que a dimensão da partícula diminui, ou seja, decai com seu volume.

Por outro lado dipolos oscilantes emitem radiação, o espalhamento Rayleigh, que tende a expulsá-los. O espalhamento Rayleigh, entretanto, depende de  $k^4 r^6$  ou seja, de  $1/\lambda^4$  e do raio da partícula elevado à sexta potência, de forma que a tendência é que a força de gradiente seja maior do que a de espalhamento. Partículas muito pequenas não são capturadas por causa das forças de flutuações do movimento Browniano que podem ser estimadas supondo-se uma força óptica do tipo oscilador harmônico com constante elástica  $K$ . O teorema de equipartição de energia,

$$\left\langle \frac{K \delta x^2}{2} \right\rangle = \frac{k_B T}{2} \Rightarrow \delta x = \sqrt{\frac{k_B T}{K}}, \quad (2.5)$$

onde  $T$  é a temperatura,  $k_B$  é a constante de Boltzmann, permite estimar o desvio quadrático médio  $\delta x$ , através do qual se extrai a força devido às flutuações  $F_{flut} = K \delta x = \sqrt{K k_B T}$ . Quando a força óptica de partículas muito pequenas se torna dessa ordem não é mais possível capturá-la, a menos que se abaixe a temperatura, algo factível para aprisionamento de átomos mas irrealista para aplicações biológicas em solução.

As teorias de espalhamento dependem da dimensão da partícula comparada com o comprimento de onda da luz incidente. O regime da óptica geométrica ocorre quando  $r \gg \lambda$ , o regime de Rayleigh quando  $r \ll \lambda$ , e o regime de Mie quando  $r \sim \lambda$ . Na realidade, a teoria de Mie é a mais geral possível, com os regimes geométricos e de Rayleigh podendo ser obtidos como casos limites da teoria de Mie. Entretanto, Mie só estudou o problema eletromagnético do espalhamento de ondas planas e não o caso do espalhamento de feixes focalizados. No caso de feixes focalizados a teoria é denominada de Teoria Generalizada de Lorenz-Mie. Toda essa tese é devotada á esse caso, onde a maior dificuldade advém da expansão em ondas parciais dos feixes incidentes.

## 2.1 Teoria Eletromagnética

A cor azul do céu representou um desafio não resolvido mesmo pelas mentes mais brilhantes por muitos séculos até a teoria do espalhamento de Rayleigh em 1871, que mostrou a dependência com  $r^6/\lambda^4$ . Essa teoria, entretanto, só era válida para partículas muito pequenas comparadas aos comprimentos de onda da luz espalhada,  $r/\lambda \ll 1$ , pela qual se conhece hoje o regime de espalhamento de Rayleigh. O caso de partículas muito maiores do que o comprimento de onda,  $r/\lambda \gg 1$ , é conhecido como o regime da óptica geométrica visto que pode ser explicada pela lei de refração de Snell de 1621. O que faltava era uma teoria mais geral do espalhamento por partículas esféricas de qualquer tamanho, da qual os dois regimes, de Rayleigh e da óptica geométrica, fossem obtidos como dois casos limites de  $r/\lambda$ .

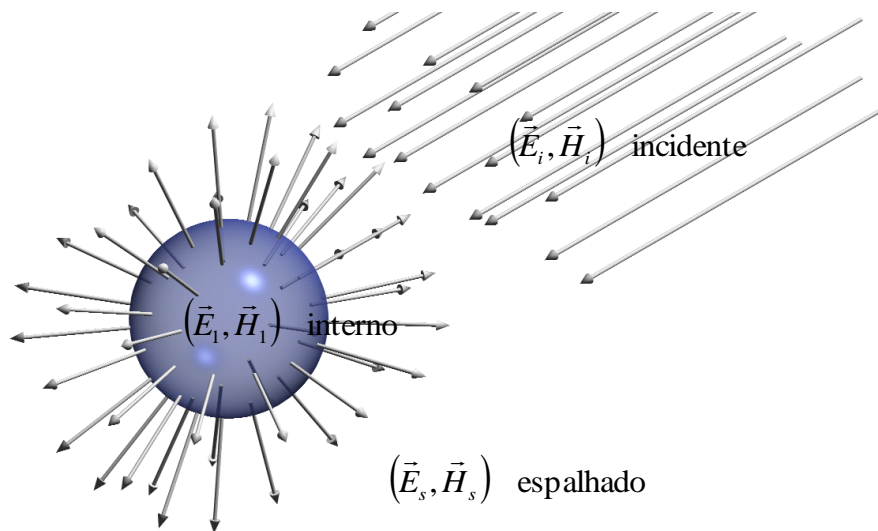
O desenvolvimento moderno dessa teoria coube ao físico alemão Gustav Mie em 1908, em seus esforços para entender as várias cores na absorção e espalhamento por partículas coloidais de ouro suspensas em água. O nome de Lorenz foi incorporado na Teoria de Lorenz-Mie a partir da década de 1980 em reconhecimento pelo trabalho publicado em 1890 em que ele resolve o problema do espalhamento por esferas dielétricas, chegando até a relação de Rayleigh  $r^6/\lambda^4$  no limite de pequenas partículas (Kerker, 1969). Esse trabalho foi largamente ignorado porque foi publicado em dinamarquês e porque não se baseou na teoria eletromagnética de Maxwell já desenvolvida desde 1864 (Lilienfeld, 2004). Os trabalhos de Debye sobre a pressão de radiação exercida sobre uma pequena partícula no espaço de 1909 chegaram a sugerir a mudança do título da teoria do espalhamento por microesferas para Teoria de Lorenz-Mie-Debye, mas sem grande aceitação por parte da comunidade envolvida.

A Teoria de Lorenz-Mie, entretanto, só se aplica ao problema eletromagnético do espalhamento de ondas planas. Ela precisou ser generalizada para o caso do espalhamento de feixes focalizados, principalmente após o aparecimento dos lasers, quando foi finalmente denominada por Teoria Generalizada de Lorenz-Mie (TGLM ou

GLMT em inglês). A maior dificuldade matemática da TGLM advém da expansão em ondas parciais dos feixes incidentes, principalmente para feixes altamente focalizados. Este capítulo é devotado à este assunto.

## 2.1.1 Formulação do Problema

Considere uma partícula com tamanho, forma e propriedades ópticas definidas iluminada por uma onda monocromática e polarizada.



**Figura 2.7 - Os campos incidentes geram um campo interno e espalhado.**

O problema eletromagnético consiste em encontrar os campos eletromagnéticos (campos EM)  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  dentro da partícula e  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  no meio externo à partícula, considerado como uma superposição dos campos incidentes  $(\vec{E}_i, \vec{H}_i)$  e os campos espalhados  $(\vec{E}_s, \vec{H}_s)$ , ver Figura 2.7. Supondo ondas harmônicas  $(e^{-i\omega t})$ , se deseja determinar:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_i + \vec{E}_s, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_i + \vec{H}_s, \quad (2.6)$$

com

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{H}_i = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (2.7)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda apropriado do meio. Os campos EM devem satisfazer as equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{E} = ikZ\vec{H}, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -ik\vec{E}/Z, \quad (2.11)$$

em todos os pontos e a impedância do meio é definida como  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  (portanto  $\varepsilon$  e  $\mu$  devem ser contínuos). Aplicando o rotacional nas equações (2.10) e (2.11) temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = ikZ\nabla \times \vec{H} = k^2\vec{E}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -i\frac{k}{Z}\nabla \times \vec{E} = k^2\vec{H}, \quad (2.13)$$

e utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (2.14)$$

obtemos

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad (2.15)$$

onde  $\nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \vec{A})$ . Portanto  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  satisfazem a equação de onda vetorial. Logo, qualquer campo vetorial com divergência nula que satisfaz a equação de onda vetorial será um campo EM admissível.

## 2.1.2 Solução Escalar da Equação de Onda

Na seção anterior mostramos que um campo EM de variação harmônica em um meio linear, isotrópico e homogêneo deve satisfazer a equação de onda, (2.15), e ser livre de divergência, (2.8) e (2.9). Além disto os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  não são independentes (2.10) e (2.11). O problema do espalhamento de uma radiação eletromagnética envolve resolver a equação de onda vetorial. A solução desta equação no espaço livre pode ser escrito como uma expansão em ondas esféricas ortogonais, conhecida como expansão de multipolo.

Antes de considerar a equação vetorial, vamos rever a equação escalar mais simples. Um campo escalar  $\psi(\vec{r}, t)$  que satisfaz a equação de onda:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.16)$$

pode ser transformado por Fourier no tempo como

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.17)$$

onde cada componente harmônico de Fourier satisfaz a equação de onda de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \omega) = 0, \quad (2.18)$$



onde  $k^2 = \omega^2/c^2$ . Podemos escrever esta equação em termos de coordenadas esféricas. Onde,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2}, \quad (2.19)$$

e portanto,

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2} + k^2 \right] \psi = 0. \quad (2.20)$$

Esta equação é bem conhecida e pode ser resolvida por separação de variáveis obtendo,

$$\psi = R_n(r) Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.21)$$

Os harmônicos esféricos  $Y_{nm}(\theta, \phi)$  satisfazem as seguintes equações:

$$L^2 Y_{nm} = n(n+1) Y_{nm}, \quad (2.22)$$

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.23)$$

onde  $n$  é um inteiro positivo não nulo e  $m$  um inteiro que satisfaz  $|m| \leq n$ ,  $P_n^m(x)$  é a função associada de Legendre. A função radial satisfaz,

$$\left[ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} + [k^2 r^2 - n(n+1)] \right] R_n(r) = 0, \quad (2.24)$$

onde não há uma dependência de  $m$ . As soluções são as funções esféricas de Bessel, definidas como,

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z), \quad (2.25)$$

$$y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+1/2}(z). \quad (2.26)$$

Também podemos definir as funções esféricas de Hankel,

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(z) &= j_n(z) + iy_n(z) \\ h_n^{(2)}(z) &= j_n(z) - iy_n(z) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Voltando para a parte angular, onde o operador diferencial  $L^2$  é dado por,

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad (2.28)$$

onde

$$\vec{L} = -i\vec{r} \times \nabla, \quad (2.29)$$

que é o momento angular orbital da mecânica quântica a menos de um fator  $\hbar$ . Os componentes de  $\vec{L}$  podem ser escritos convenientemente nas combinações,

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= L_x \pm iL_y = e^{i\phi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Note que  $\vec{L}$  opera somente nas variáveis angulares e independe de  $r$ . De sua definição (2.29) fica evidente que

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0, \quad (2.31)$$

ou explicitamente em tensores por,

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = x_i \varepsilon_{ijk} x_j \partial_k = \varepsilon_{ijk} x_i x_j \partial_k = 0, \quad (2.32)$$

pois  $x_i x_j$  é um tensor simétrico e o de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$  é anti-simétrico<sup>1</sup>. Como o gradiente em coordenadas esféricas é dado por,

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (2.33)$$

logo,

$$\vec{L} = -i\vec{r} \times \nabla = -i \left[ \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]. \quad (2.34)$$

Os seguintes resultados também são bem conhecidos em mecânica quântica:

$$\begin{aligned} L_{\pm} Y_{nm} &= \sqrt{(n \mp m)(n \pm m + 1)} Y_{n, m \pm 1} \\ L_z Y_{nm} &= m Y_{nm} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Além de

$$L^2 \vec{L} = \vec{L} L^2 \quad \vec{L} \times \vec{L} = i\vec{L} \quad L_j \nabla^2 = \nabla^2 L_j. \quad (2.36)$$

## 2.1.3 Solução Vetorial da Equação de Onda

Supondo que conhecemos a solução escalar  $\psi$  da equação de onda, onde podemos escrever a equação de onda como um operador  $\mathcal{L}$ , tal como,

$$\mathcal{L} = \nabla^2 + k^2. \quad (2.37)$$

---

<sup>1</sup> A contração de um tensor simétrico  $S_{ij}$  com um antisimétrico  $A_{ij}$  é sempre nula, pois  $S_{ij}A_{ij} = A_{ji}S_{ji}$  por simples troca de letras, agora usando as propriedades de simetria  $S_{ij}A_{ij} = (S_{ij})(-A_{ij}) = -S_{ij}A_{ij}$  levando a  $2S_{ij}A_{ij} = 0$ , (c.q.d.).

De modo que  $\mathcal{L}\psi = 0$ , porém queremos determinar a solução vetorial (2.15)  $\mathcal{L}\vec{F} = 0$ .

Suponha agora que um operador vetorial  $\vec{V}$  comuta com  $\mathcal{L}$ , i.e.,

$$[\vec{V}, \mathcal{L}]\psi = 0, \quad (2.38)$$

então  $\vec{V}\psi = \vec{F}$  é a solução vetorial da equação vetorial  $\mathcal{L}\vec{F} = 0$ .

No caso da solução escalar com o Laplaciano em coordenadas esféricas da seção anterior, temos uma solução geral de  $\mathcal{L}\psi = 0$  em coordenadas esféricas que é dada por,

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{n,m} [A_{nm} z_n^{(1)}(kr) + B_{nm} z_n^{(2)}(kr)] Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.39)$$

onde  $z_n^{(i)}(kr)$  pode ser qualquer uma das funções esféricas  $j_n(kr)$ ,  $y_n(kr)$ ,  $h_n^{(1)}(kr)$ ,  $h_n^{(2)}(kr)$  que são dadas pelas condições de contorno do problema. Dependendo da região do problema, escolhemos essas funções radiais, no caso  $y_n(kr)$ ,  $h_n^{(1)}(kr)$  e  $h_n^{(2)}(kr)$  divergem para  $kr \rightarrow 0$ . Portanto soluções para interiores de uma esfera só podem ser do tipo  $j_n(kr)$ . Por outro lado o comportamento assintótico de  $h_n^{(1)}(kr) \sim e^{ikr}/r$  é típico de uma onda esférica que foge da origem, já  $h_n^{(2)}(kr) \sim e^{-ikr}/r$  é o comportamento de uma onda esférica que se propaga na direção da origem.

No caso vetorial, queremos mostrar que os operadores vetoriais comutam com  $\mathcal{L}$ . Para isso vamos provar que  $\nabla$ ,  $\vec{L}$  e  $\nabla \times \vec{L}$  comutam com  $\mathcal{L}$ .

$$\nabla^2 \nabla = \partial_j \partial_j \hat{\mu}_i \partial_i = \hat{\mu}_i \partial_i \partial_j \partial_j = \nabla \nabla^2. \quad (2.40)$$

Logo  $[\nabla^2, \nabla] = 0$ .

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{L} &= \partial_m \partial_m (-i \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} x_j \partial_k) = -i \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} \partial_m \partial_m (x_j \partial_k) \\ &= -i \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} [\partial_m \delta_{m,j} \partial_k + \partial_m (x_j \partial_m \partial_k)] = -i \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} [\partial_j \partial_k + \delta_{m,j} \partial_m \partial_k + x_j \partial_m \partial_m \partial_k]. \quad (2.41) \\ &= -i \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} [\partial_j \partial_k + \partial_j \partial_k + x_j \partial_k \partial_m \partial_m] = -i \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} x_j \partial_k (\partial_m \partial_m) = \vec{L} \nabla^2 \end{aligned}$$

Onde no final da segunda linha usamos novamente o fato de que  $\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k = 0$  já que  $\partial_j\partial_k$  é um tensor simétrico e  $\varepsilon_{ijk}$  um é anti-simétrico, logo  $[\nabla^2, \vec{L}] = 0$ .

Para a terceira comutação vamos precisar primeiro escrever  $\nabla \times \vec{L}$  de forma tensorial,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{L} &= \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j L_k = \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j [-i \varepsilon_{klm} x_l \partial_m] = -i \hat{\mu}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j (x_l \partial_m) \\
 &= -i \hat{\mu}_i [\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}] \partial_j (x_l \partial_m) = -i \hat{\mu}_i [\partial_j (x_l \partial_j) - \partial_j (x_j \partial_l)] \\
 &= -i \hat{\mu}_i [x_i \partial_j \partial_j + \delta_{i,j} \partial_j - \delta_{j,j} \partial_i - x_j \partial_j \partial_i] \\
 &= -i \hat{\mu}_i [x_i \partial_j \partial_j - 2 \partial_i - x_j \partial_j \partial_i] = i [2 \hat{\mu}_i \partial_i - \hat{\mu}_i x_i \partial_j \partial_j + x_j \partial_j \hat{\mu}_i \partial_i] \\
 &= i [2 \nabla - \vec{r} \nabla^2 + (\vec{r} \cdot \nabla) \nabla]
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Vamos, também provar uma outra relação a partir de (2.42), que será utilizada posteriormente.

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \cdot \nabla \times \vec{L} &= i \vec{r} \cdot [2 \nabla - \vec{r} \nabla^2 + (\vec{r} \cdot \nabla) \nabla] = i [2 \vec{r} \cdot \nabla - r^2 \nabla^2 + \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \nabla) \nabla] \\
 &= i [2 \vec{r} \cdot \nabla - r^2 \nabla^2 + \vec{r} \cdot (\nabla(\vec{r} \cdot \nabla) - \nabla)] = i [2 \vec{r} \cdot \nabla - r^2 \nabla^2 + (\vec{r} \cdot \nabla)^2 - \vec{r} \cdot \nabla] \\
 &= i [\vec{r} \cdot \nabla - r^2 \nabla^2 + (\vec{r} \cdot \nabla)^2] = i \left[ r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 + r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \\
 &= i L^2
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Onde utilizamos, (2.19) na última passagem.

Podemos agora provar a terceira comutação como,

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \nabla \times \vec{L} &= \partial_m \partial_m \nabla \times \vec{L} = i [2 \hat{\mu}_i \partial_i \partial_m \partial_m - \partial_m \partial_m (\hat{\mu}_i x_i \partial_j \partial_j) + \partial_m \partial_m (x_j \partial_j) \hat{\mu}_i \partial_i] \\
 &= i \hat{\mu}_i [2 \partial_i \partial_m \partial_m - x_i \partial_j \partial_j \partial_m \partial_m - \partial_m \delta_{i,m} \partial_j \partial_j + x_j \partial_j \partial_i \partial_m \partial_m + \partial_m \delta_{j,m} \partial_j \partial_i] \\
 &= i [2 \hat{\mu}_i \partial_i - \hat{\mu}_i x_i \partial_j \partial_j + x_j \partial_j \hat{\mu}_i \partial_i] \partial_m \partial_m + i [-\hat{\mu}_i \partial_i \partial_j \partial_j + \partial_j \partial_j \hat{\mu}_i \partial_i] = \\
 &= i [2 \hat{\mu}_i \partial_i - \hat{\mu}_i x_i \partial_j \partial_j + x_j \partial_j \hat{\mu}_i \partial_i] \partial_m \partial_m = (\nabla \times \vec{L}) \nabla^2
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Portanto se  $\mathcal{L}\psi = 0$ , então  $\nabla\psi$ ,  $\vec{L}\psi$  e  $\nabla \times \vec{L}\psi$  são soluções de  $\mathcal{L}\vec{F} = 0$ . Porém  $\nabla$  não faz parte do conjunto de soluções do nosso sistema já que de acordo com as equações de Maxwell temos  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ , e neste caso

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi \neq 0. \quad (2.45)$$

As outras soluções satisfazem a condição dos campos serem transversais,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{L} \psi &= \partial_i L_i \psi = -i \partial_i [\varepsilon_{ijk} x_j \partial_k] \psi = -i \varepsilon_{ijk} \partial_i x_j \partial_k \psi \\ &= -i \varepsilon_{ijk} \delta_{i,j} \partial_k \psi - i \varepsilon_{ijk} x_j \partial_i \partial_k \psi = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

que é nulo pois tanto  $\delta_{i,j}$  quanto  $\partial_i \partial_k$  são tensores simétricos.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{L}) = \partial_i [\varepsilon_{ijk} \partial_j L_k] = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j L_k = 0. \quad (2.47)$$

Logo, o problema de encontrar as soluções das equações dos campos se reduz a um problema mais simples de encontrar as soluções da equação de onda escalar.

Estas duas soluções estão relacionadas aos campos EM, pois se  $\vec{H} = \vec{L} \psi$  temos,

$$\nabla \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad \vec{E} = \frac{iZ}{k} \nabla \times \vec{H} = \frac{iZ}{k} \nabla \times \vec{L} \psi. \quad (2.48)$$

Já se  $\vec{E} = \vec{L} \psi$ , teremos,

$$\nabla \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{H} = \frac{-i}{kZ} \nabla \times \vec{E} = \frac{-i}{kZ} \nabla \times \vec{L} \psi. \quad (2.49)$$

Abaixo está uma tabela que resume as propriedades do operador momento angular.

$\vec{L} = -i\vec{r} \times \nabla$	(2.29)	$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$	(2.32)
$L^2 \vec{L} = \vec{L} L^2$	(2.36)	$\vec{L} \times \vec{L} = i\vec{L}$	(2.36)
$L_j \nabla^2 = \nabla^2 L_j$	(2.36)	$[\nabla^2, \nabla] = 0$	(2.40)
$[\nabla^2, \vec{L}] = 0$	(2.41)	$\nabla \times \vec{L} = i[2\nabla - \vec{r} \nabla^2 + (\vec{r} \cdot \nabla) \nabla]$	(2.42)
$[\nabla^2, \nabla \times \vec{L}] = 0$	(2.44)	$\nabla \cdot \vec{L} \psi = 0$	(2.46)
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{L}) = 0$	(2.47)	$\vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{L}) = iL^2$	(2.43)

Tabela 2.1 – Propriedades do operador momento angular.

## 2.1.4 Campos Transversais

Como foi provado anteriormente (2.32),  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ , portanto podemos escolher  $\vec{E} = \vec{L}\psi$  logo  $\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$  e o campo elétrico será transversal. Com a outra escolha temos  $\vec{H} = \vec{L}\psi$  logo  $\vec{r} \cdot \vec{H} = 0$  e o campo magnético será transversal.

Temos então soluções do tipo transversais elétricos,

$$\vec{E}^{(TE)} = \vec{L}\psi, \quad \vec{H}^{(TE)} = \frac{-i}{kZ} \nabla \times \vec{L}\psi, \quad (2.50)$$

e transversais magnéticos:

$$\vec{H}^{(TM)} = \vec{L}\psi, \quad \vec{E}^{(TM)} = \frac{iZ}{k} \nabla \times \vec{L}\psi. \quad (2.51)$$

Como a solução da equação de onda escalar é (2.39) podemos separar em soluções transversais, onde

$$\psi_{nm}^{(TM)} = z_n^{(1)}(kr)Y_{nm}(\theta, \phi) \quad \text{e} \quad \psi_{nm}^{(TE)} = z_n^{(2)}(kr)Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.52)$$

Portanto os campos transversais podem ser escritos como,

$$\vec{E}_{nm}^{(TE)} = \vec{L}\psi_{nm}^{(TE)} = z_n^{(2)}(kr)\vec{L}Y_{nm}(\theta, \phi) \quad \text{e} \quad \vec{H}_{nm}^{(TE)} = \frac{-i}{kZ} \nabla \times [z_n^{(2)}(kr)\vec{L}Y_{nm}(\theta, \phi)], \quad (2.53)$$

$$\vec{H}_{nm}^{(TM)} = \vec{L}\psi_{nm}^{(TM)} = z_n^{(1)}(kr)\vec{L}Y_{nm}(\theta, \phi) \quad \text{e} \quad \vec{E}_{nm}^{(TM)} = \frac{iZ}{k} \nabla \times [z_n^{(1)}(kr)\vec{L}Y_{nm}(\theta, \phi)]. \quad (2.54)$$

Estes dois conjuntos de soluções formam um conjunto completo da solução vetorial das equações de Maxwell em uma região livre de fontes. Como  $\vec{L}Y_{nm}$  tem um papel importante nos campos de multipolo, é conveniente introduzir o vetor harmônico esférico,

$$\vec{X}_{nm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \vec{L} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.55)$$

Pode ser mostrado que o vetor harmônico esférico possui propriedades de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \int \vec{X}_{n'm'}^* \cdot \vec{X}_{nm} d\Omega &= \frac{1}{\sqrt{n'(n'+1)}\sqrt{n(n+1)}} \int (\vec{L} Y_{n'm'})^* \cdot \vec{L} Y_{nm} d\Omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{n'(n'+1)}\sqrt{n(n+1)}} \int (\vec{L} \cdot \vec{L} Y_{n'm'})^* Y_{nm} d\Omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{n'(n'+1)}\sqrt{n(n+1)}} \int (L^2 Y_{n'm'})^* Y_{nm} d\Omega \\ &= \frac{n'(n'+1)}{\sqrt{n'(n'+1)}\sqrt{n(n+1)}} \int Y_{n'm'}^* Y_{nm} d\Omega = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

pois  $\vec{L}$  é um operador Hermitiano e portanto  $A^* \vec{L} = (\vec{L} A)^*$ .

$$\begin{aligned} \int \vec{X}_{n'm'}^* \cdot (\vec{r} \times \vec{X}_{nm}) d\Omega &= \frac{1}{\sqrt{n'(n'+1)}\sqrt{n(n+1)}} \int (\vec{L} Y_{n'm'})^* \cdot (\vec{r} \times \vec{L}) Y_{nm} d\Omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{n'(n'+1)}\sqrt{n(n+1)}} \int Y_{n'm'}^* \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{L}) Y_{nm} d\Omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{n'(n'+1)}\sqrt{n(n+1)}} i \int Y_{n'm'}^* \vec{r} \cdot \vec{L} Y_{nm} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde utilizamos o fato que,

$$\begin{aligned} \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{L}) &= \varepsilon_{ijk} (L_i x_j) L_k + \varepsilon_{ijk} x_j L_i L_k = -i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} x_l \partial_m x_j L_k + \varepsilon_{ijk} x_j L_i L_k = \\ &= -i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilj} x_l L_k - x_j \varepsilon_{jik} L_i L_k = -i [\delta_{jl} \delta_{kj} - \delta_{jj} \delta_{kl}] x_l L_k - x_j (\vec{L} \times \vec{L})_j, \\ &= -i [\delta_{kl} - 3\delta_{kl}] x_l L_k - \vec{r} \cdot (i\vec{L}) = 2ix_k L_k - i\vec{r} \cdot \vec{L} = i\vec{r} \cdot \vec{L} \end{aligned} \quad (2.58)$$

e que  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ . Combinando as duas soluções vetoriais das equações de Maxwell (2.53) e (2.54), obtemos a solução geral que representa uma expansão em multipolos, já que as fontes destes campos no dielétrico são as densidades de cargas elétricas e momento magnético.



$$\vec{E} = E_0 \sum_{n,m} \left[ \frac{i}{k} A_{nm} \nabla \times z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) + B_{nm} z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) \right], \quad (2.59)$$

$$\vec{H} = H_0 \sum_{n,m} \left[ A_{nm} z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) - \frac{i}{k} B_{nm} \nabla \times z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) \right]. \quad (2.60)$$

Onde as amplitudes estão relacionadas pela impedância do meio,  $H_0 = Z E_0$ , e  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  especifica a quantidade de campos de multipolo magnéticos e elétricos. Desta forma os campos são decompostos em uma série de constituintes elementares de ondas parciais, cujas amplitudes e fases são dadas pelos coeficientes  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$ .

## 2.1.5 Expansão de uma Onda Arbitrária

Para determinar os coeficientes da expansão dos campos EM, podemos fazer uso da natureza dos campos transversais. Multiplicando (2.59) e (2.60) pelo vetor radial  $\vec{r}$  a esquerda, obtemos

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = E_0 \sum_{n,m} \frac{i}{k} A_{nm} \vec{r} \cdot \nabla \times z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.61)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{H} = H_0 \sum_{n,m} -\frac{i}{k} B_{nm} \vec{r} \cdot \nabla \times z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.62)$$

pois  $\vec{r} \cdot \vec{X}_{nm} \propto \vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ . O termo envolvendo o rotacional torna-se,

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \nabla \times z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) &= \vec{r} \cdot (\nabla z_n(kr) \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)) + z_n(kr) \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)) \\ &= 0 + z_n(kr) \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)) \end{aligned}, \quad (2.63)$$

onde, o primeiro termo do lado direito é nulo pois a função radial só depende de  $r$  e como o produto vetorial gera um vetor perpendicular a  $\vec{r}$ , o produto escalar com  $\vec{r}$

será nulo. Resta portando determinar quem é  $\vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi))$ , para isso vamos utilizar a identidade (2.43), a definição (2.55), junto à propriedade (2.22),

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{L}) Y_{nm}(\theta, \phi) \\ &= \frac{i}{\sqrt{n(n+1)}} L^2 Y_{nm}(\theta, \phi) = i \sqrt{n(n+1)} Y_{nm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.64)$$

As simplificações incluídas são devidas ao fato do harmônico esférico não depender da variável radial, por isso quando as fazemos, a componente radial do produto escalar do gradiente do harmônico esférico é nulo, assim como a derivada radial do harmônico esférico. Podemos reescrever os nossos campos em multipolos como,

$$\vec{r} \cdot \vec{E} = E_0 \sum_{n,m} -\frac{1}{k} A_{nm} \sqrt{n(n+1)} z_n(kr) Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.65)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{H} = H_0 \sum_{n,m} \frac{1}{k} B_{nm} \sqrt{n(n+1)} z_n(kr) Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.66)$$

Trocando os índices de somatória de  $n$  para  $n'$ , multiplicando os termos acima por  $Y_{nm}^*(\theta, \phi)$  e integrando em  $d\Omega$  obtemos,

$$\begin{aligned} \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) \vec{r} \cdot \vec{E} d\Omega &= E_0 \sum_{n',m'} -\frac{1}{k} A_{n'm'} \sqrt{n'(n'+1)} z_{n'}(kr) \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) Y_{n'm'}(\theta, \phi) d\Omega \\ &= -E_0 \sum_{n',m'} \frac{1}{k} A_{n'm'} \sqrt{n'(n'+1)} z_{n'}(kr) \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \\ &= -E_0 \frac{1}{k} A_{nm} \sqrt{n(n+1)} z_n(kr) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) \vec{r} \cdot \vec{H} d\Omega &= H_0 \sum_{n',m'} \frac{1}{k} B_{n'm'} \sqrt{n'(n'+1)} z_{n'}(kr) \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) Y_{n'm'}(\theta, \phi) d\Omega \\ &= H_0 \sum_{n',m'} \frac{1}{k} B_{n'm'} \sqrt{n'(n'+1)} z_{n'}(kr) \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \\ &= H_0 \frac{1}{k} B_{nm} \sqrt{n(n+1)} z_n(kr) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Logo os coeficientes de multipolos são,

$$A_{nm}z_n(kr) = \frac{-k}{E_0 \sqrt{n(n+1)}} \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) \vec{r} \cdot \vec{E} d\Omega, \quad (2.69)$$

$$B_{nm}z_n(kr) = \frac{k}{H_0 \sqrt{n(n+1)}} \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) \vec{r} \cdot \vec{H} d\Omega. \quad (2.70)$$

Desta forma podemos determinar os coeficientes de multipolo de um campo elétrico e magnético arbitrário.

## 2.1.6 Espalhamento Lorenz-Mie Generalizado

Considere uma onda arbitrária incidente de um meio com índice de refração  $n_1$  em uma esfera homogênea e isotrópica de raio  $a$  e índice de refração  $n_2$ . Em geral, a onda é espalhada pelo obstáculo. Longe da esfera os campos EM podem ser representados como uma soma de ondas incidentes e um conjunto de ondas esféricas saindo da esfera:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{esp} & \vec{E}_2 &= \vec{E}_{int} \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{esp} & \vec{H}_2 &= \vec{H}_{int} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Como foi demonstrado na seção anterior, o campo elétrico incidente pode ser expandido em uma série infinita de harmônicos esféricos vetoriais. Vamos utilizar os coeficientes  $G_{nm}^{TM}$  e  $G_{nm}^{TE}$ , como coeficientes da expansão da onda incidente,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{inc} &= E_0 \sum_{n,m} \left[ \frac{i}{k_1} G_{nm}^{TM} \nabla \times j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) + G_{nm}^{TE} j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right] \\ \vec{H}_{inc} &= \frac{E_0}{Z_1} \sum_{n,m} \left[ G_{nm}^{TM} j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) - \frac{i}{k_1} G_{nm}^{TE} \nabla \times j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

Nos também podemos expandir o campo EM espalhado e o campo dentro da esfera em harmônicos esféricos vetoriais. Para que tenhamos um valor finito na origem, isso requer que adotemos  $j_n(k_2 r)$ , onde  $k_2 = 2\pi n_2 / \lambda$  é o número de onda dentro da esfera.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{int}} &= E_0 \sum_{n,m} \left[ \frac{i}{k_2} c_{nm} \nabla \times j_n(k_2 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) + d_{nm} j_n(k_2 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right] \\ \vec{H}_{\text{int}} &= \frac{E_0}{Z_2} \sum_{n,m} \left[ c_{nm} j_n(k_2 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) - \frac{i}{k_2} d_{nm} \nabla \times j_n(k_2 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right].\end{aligned}\quad (2.73)$$

Na região fora da esfera  $j_n$  e  $n_n$  são bem comportadas; portanto, a expansão do campo espalhado envolve ambas as funções. Por isso é conveniente adotar agora as funções esféricas de Hankel,  $h_n^{(1)}$  e  $h_n^{(2)}$ . Podemos demonstrar que somente uma destas funções é necessária tomando a expansão assintótica das funções de Hankel de ordem  $n$  para valores grandes de  $|kr|$ :

$$\begin{aligned}H_n^{(1)}(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left[kr - (n+1)\frac{\pi}{2}\right]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(n+m+1/2)}{(2ikr)^m m! \Gamma(n-m+1/2)}, \\ H_n^{(2)}(kr) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i\left[kr - (n+1)\frac{\pi}{2}\right]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m+1/2)}{(2ikr)^m m! \Gamma(n-m+1/2)}\end{aligned}, \quad (2.74)$$

onde  $\Gamma$  é a função Gamma;  $\Gamma(n+1) = n!$  se  $n$  for um inteiro não negativo. Segue de (2.74) que as funções esféricas de Hankel são dadas assintoticamente por

$$\begin{aligned}h_n^{(1)}(kr) &\sim \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr} \\ h_n^{(2)}(kr) &\sim -\frac{i^n e^{-ikr}}{ikr}\end{aligned} \quad kr \gg n^2. \quad (2.75)$$

A primeira destas expressões assintótica corresponde a uma onda esférica saindo; a segunda corresponde a uma onda esférica chegando. Se o campo espalhado deve ser uma onda que sai em grandes distâncias da partícula, então somente  $h_n^{(1)}$  deve ser utilizado na função geradora. Quando consideramos o campo espalhado em

grandes distâncias iremos precisar também da expressão assintótica da derivada de  $h_n^{(1)}$ , que segue da identidade

$$(2n+1)z'_n = n z_{n-1} - (n+1)z_{n+1}, \quad (2.76)$$

e de (2.75) que

$$\frac{dh_n^{(1)}(kr)}{dr} \sim \frac{(-i)^n e^{ikr}}{r} \quad (kr \gg n^2). \quad (2.77)$$

A expansão dos campos espalhados é portanto dada por,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{esp} &= E_0 \sum_{n,m} \left[ \frac{i}{k_1} a_{nm} \nabla \times h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) + b_{nm} h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right] \\ \vec{H}_{esp} &= \frac{E_0}{Z_1} \sum_{n,m} \left[ a_{nm} h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) - \frac{i}{k_1} b_{nm} \nabla \times h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

O campo EM deve satisfazer as equações de Maxwell em pontos onde  $\varepsilon$  e  $\mu$  sejam contínuos. Porém se na interface partícula/meio há uma descontinuidade, são nestas descontinuidades que impomos as seguintes condições nos campos:

$$\begin{aligned} [\vec{E}_2(\vec{x}) - \vec{E}_1(\vec{x})] \times \hat{r} &= 0 \\ [\vec{H}_2(\vec{x}) - \vec{H}_1(\vec{x})] \times \hat{r} &= 0 \end{aligned} \quad em \ r = a. \quad (2.79)$$

As condições de contorno (2.79) requerem que as componentes tangenciais de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  sejam contínuas na interface separando os meios de diferentes propriedades. Antes de continuar vamos mudar de variáveis e adotar a variável fator de tamanho ( $x$ ), utilizado amplamente nas referências de espalhamento, cuja relação é,

$$x = k_1 a = \frac{2\pi n_1 a}{\lambda} \quad e \quad Mx = \frac{n_2}{n_1} k_1 a = k_2 a, \quad (2.80)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são os índices de refração do meio e de uma partícula respectivamente. Notem que o fator de tamanho  $x$  e o índice de refração relativo  $M$

são matematicamente independentes mas não fisicamente, já que tanto um quanto o outro variam em função do comprimento de onda. Para os modos TE dos campos elétricos, os campos (2.72), (2.73) e (2.78) contém termos envolvendo  $z_n(kr)\vec{X}_{n,m}(\theta, \phi)$ , logo a condição de contorno envolve termos triviais,

$$\begin{aligned} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)^{TE} \times \hat{r} &= (\vec{E}_{esp}^{TE} + \vec{E}_{inc}^{TE} - \vec{E}_{int}^{TE}) \times \hat{r} \\ &= E_0 \sum_{n,m} (b_{nm} h_n^{(1)}(x) + G_{nm}^{TE} j_n(x) - d_{nm} j_n(Mx)) \vec{X}_{n,m} \times \hat{r} = 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

que deve ser válido para todos os ângulos, logo,

$$b_{nm} h_n^{(1)}(x) + G_{nm}^{TE} j_n(x) = d_{nm} j_n(Mx). \quad (2.82)$$

Já para os modos TE dos campos magnéticos, temos termos contendo  $\hat{r} \times (\nabla \times z_n(kr)\vec{X}_{n,m})$ . Este é um pouco mais trabalhoso e será demonstrado abaixo.

Para isso vamos utilizar as relações (2.42), (2.20) e (2.33) que será reescrito como,

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} (\nabla Y_{nm}) &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \hat{r} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \hat{\theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \right] \right) \\ &= \frac{-1}{r} \left[ \hat{\theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \right] = -\nabla Y_{nm} \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times f(r) \vec{X}_{n,m}) &= (\nabla f(r) \times \vec{X}_{n,m} + f(r) \nabla \times \vec{X}_{n,m}) \\
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} + \frac{f(r)}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla \times \vec{L} Y_{n,m} \\
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} + i \frac{f(r)}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ \left( 2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla + \vec{r} \frac{n(n+1)}{r^2} \right] Y_{n,m} \\
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} + i \frac{f(r)}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ \nabla Y_{n,m} + \vec{r} \frac{n(n+1)}{r^2} Y_{n,m} \right] \quad (2.84) \\
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} + i \frac{f(r)}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ -i \frac{\vec{r}}{r^2} \times \vec{L} Y_{n,m} + \vec{r} \frac{n(n+1)}{r^2} Y_{n,m} \right] \\
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} + f(r) \frac{\vec{r}}{r^2} \times \vec{X}_{n,m} + i \sqrt{n(n+1)} \frac{f(r)}{r^2} Y_{n,m} \vec{r} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial(r f(r))}{\partial r} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} + i \sqrt{n(n+1)} \frac{f(r)}{r} Y_{n,m} \hat{r}
\end{aligned}$$

Com o produto vetorial o segundo termo é nulo e a relação fica portanto,

$$\hat{r} \times (\nabla \times f(r) \vec{X}_{n,m}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r f(r))}{\partial r} \vec{X}_{n,m}. \quad (2.85)$$

Portanto para os modos TE dos campos magnéticos temos,

$$\begin{aligned}
(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)^{TE} \times \hat{r} &= (\vec{H}_{exp}^{TE} + \vec{H}_{inc}^{TE} - \vec{H}_{int}^{TE}) \times \hat{r} \\
&= E_0 \sum_{n,m} \left( b_{nm} \frac{[x h_n^{(1)}(x)]'}{Z_1 x} + G_{nm}^{TE} \frac{[x j_n(x)]'}{Z_1 x} - d_{nm} \frac{[Mx j_n(Mx)]'}{Z_2 Mx} \right) \vec{X}_{n,m} \times \hat{r} = 0 \quad (2.86)
\end{aligned}$$

Logo,

$$b_{nm} [x h_n^{(1)}(x)]' + G_{nm}^{TE} [x j_n(x)]' = \frac{Z_1 k_1}{Z_2 k_2} d_{nm} [Mx j_n(Mx)]' = \frac{\mu_1}{\mu_2} d_{nm} [Mx j_n(Mx)]', \quad (2.87)$$

onde o apóstrofo indica a diferenciação com respeito ao argumento dentro do parênteses. Para simplificar estas expressões vamos introduzir as funções de Riccati-Bessel para os coeficientes de espalhamento:

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho) \quad \xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho). \quad (2.88)$$

Desta maneira, das equações para os coeficientes TE (2.82) e (2.87) obtemos,

$$b_{nm}\xi_n(x) - \frac{1}{M}d_{nm}\psi_n(Mx) = -G_{nm}^{TE}\psi_n(x), \quad (2.89)$$

$$b_{nm}\xi'_n(x) - \frac{\mu_1}{\mu_2}d_{nm}\psi'_n(Mx) = -G_{nm}^{TE}\psi'_n(x). \quad (2.90)$$

Igualmente dos coeficientes TM obtemos,

$$a_{nm}\xi_n(x) - \frac{\mu_1}{\mu_2}c_{nm}\psi_n(Mx) = -G_{nm}^{TM}\psi_n(x), \quad (2.91)$$

$$a_{nm}\xi'_n(x) - \frac{1}{M}c_{nm}\psi'_n(Mx) = -G_{nm}^{TM}\psi'_n(x). \quad (2.92)$$

Gostaríamos de saber como as quantidades observáveis variam com o tamanho e propriedades ópticas da esfera e do meio. Para isso devemos primeiramente obter expressões explícitas para os coeficientes de espalhamento  $a_n$  e  $b_n$ . As quatro equações lineares simultâneas acima são facilmente resolvidas para os coeficientes do campo dentro da partícula, para  $\mu_1 \approx \mu_2$

$$\begin{aligned} -c_n &= \frac{c_{nm}}{G_{nm}^{TE}} = \frac{\psi_n(x)\xi'_n(x) - \psi'_n(x)\xi_n(x)}{\psi'_n(Mx)\xi_n(x) - M\psi_n(Mx)\xi'_n(x)}, \\ -d_n &= \frac{d_{nm}}{G_{nm}^{TM}} = \frac{\psi'_n(x)\xi_n(x) - \psi_n(x)\xi'_n(x)}{\psi_n(Mx)\xi'_n(x) - M\psi'_n(Mx)\xi_n(x)}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

e os coeficientes dos campos espalhados,

$$\begin{aligned} -a_n &= \frac{a_{nm}}{G_{nm}^{TM}} = \frac{M\psi_n(Mx)\psi'_n(x) - \psi'_n(Mx)\psi_n(x)}{\psi'_n(Mx)\xi_n(x) - M\psi_n(Mx)\xi'_n(x)}, \\ -b_n &= \frac{b_{nm}}{G_{nm}^{TE}} = \frac{M\psi'_n(Mx)\psi_n(x) - \psi_n(Mx)\psi'_n(x)}{\psi_n(Mx)\xi'_n(x) - M\psi'_n(Mx)\xi_n(x)}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Estas equações características são independentes do feixe incidente. Os coeficientes dos campos espalhados e dos campos dentro da partícula são



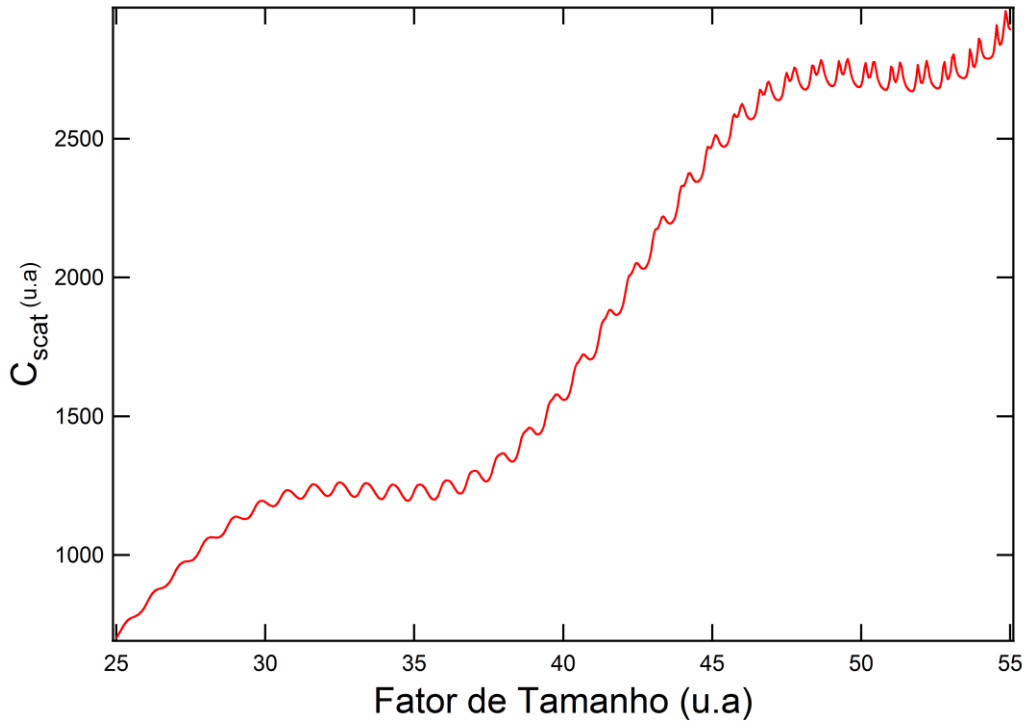
independentes do índice  $m$  devido a simetria esférica do espalhador, caso a esfera fosse deformada os modos azimutais não seriam mais degenerados. Da equação (2.94) podemos observar que se o índice de refração relativo ( $M$ ) for igual a um, i.e. não existe o espalhador, os coeficientes de espalhamentos são nulos como esperados. Definimos os coeficientes de espalhamento com um sinal negativo para ficar compatível com a notação utilizada nos trabalhos do grupo do Gouesbet. Para os modos transversais magnéticos (TM) temos os  $a_n$ , e para os transversais elétricos (TE)  $b_n$ . Notem que os denominadores de  $c_n$  e  $b_n$  são idênticos assim como os de  $a_n$  e  $d_n$ . Se para um  $n$  particular a frequência ou o raio é tal que um destes denominadores seja muito pequeno, o modo normal correspondente irá dominar no campo espalhado. O modo  $a_n$  é dominante se a condição,

$$\frac{\xi'_n(x)}{\xi_n(x)} = \frac{\psi'_n(Mx)}{M\psi_n(Mx)}, \quad (2.95)$$

é aproximadamente satisfeita, similarmente o modo  $b_n$  é dominante se,

$$\frac{\xi'_n(x)}{\xi_n(x)} = M \frac{\psi'_n(Mx)}{\psi_n(Mx)}, \quad (2.96)$$

é aproximadamente satisfeito. Em geral, o campo é espalhado em uma superposição de modos normais. As frequências para as quais (2.95) e (2.96) são exatamente satisfeitas, são chamadas de MDR (*morphology dependent resonance*) ou de frequências naturais de uma esfera, são complexas e os modos associados são denominados virtuais. Se as partes imaginárias destas frequências complexas forem pequenas, quando comparadas as partes reais, a frequencial natural corresponde aproximadamente à frequência real da onda EM incidente que excita os vários modos EM. Estas ressonâncias estão exibidas na Figura 2.8, onde o gráfico representa a seção de choque de espalhamento versus o fator de tamanho para um índice de refração relativo do sistema água/poliestireno.



**Figura 2.8 – Seção de Choque de espalhamento versus fator de tamanho.**

Onde a seção de choque de espalhamento é dada por (Bohren, 1983),

$$C_{scat} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (2.97)$$

Esta função de  $x$  para  $M$  fixo tem vários traços: uma série de máximos e mínimos regularmente espaçados chamados de estrutura de interferência; e uma estrutura de ondulações que são picos espaçados irregularmente que representam os modos eletromagnéticos normais de uma esfera. Este último também é conhecido como *morphology dependent resonance* (MDR) ou de *whispering gallery mode* (WGM), onde a nomenclatura MDR é mais apropriada.

Note que  $a_n$  e  $b_n$  tornam-se nulos a medida que  $M \rightarrow 1$ , isto está de acordo, pois não haverá campo espalhado se não houver a partícula. Mesmo considerando somente o campo espalhado de uma luz polarizada em  $x$ , o campo espalhado para uma luz incidente linearmente polarizada, segue da simetria da partícula. Para o caso dos campos elétricos espalhados de igual amplitude, estão relacionados por,

$$\vec{E}_s(\phi; pol - x) = \vec{E}_s(\phi + \frac{\pi}{2}; pol - y). \quad (2.98)$$

## 2.1.7 Seções de Choque

Para uma onda EM que se propaga em um meio, o momento da onda,  $\vec{P}$  equivale à razão do vetor de Poynting  $\vec{S}$  dividido pela velocidade da luz  $c$ . Esta afirmação é análoga à da mecânica quântica onde o momento de um fóton de energia  $h\nu$  vale  $h\nu/c$ . Temos então,

$$\vec{P} = \vec{S}/c. \quad (2.99)$$

Quando o campo EM incidente for absorvido ou defletido pela partícula, a transferência de momento é associada com uma força de radiação. A força de pressão de radiação,  $\vec{F}$ , exercida pelo feixe no espalhador é dada pelo momento líquido médio removido do feixe incidente por unidade de tempo, ou seja, o momento dado ao espalhador devido à extinção menos o momento perdido pelo espalhador pela re-emissão da luz (espalhamento). Ao invés de utilizar as componentes de força, é padrão definir a pressão de radiação pelo vetor  $\vec{C}_{pr} = (C_{pr,x}, C_{pr,y}, C_{pr,z})$  de seção de choque da pressão de radiação, dada por,

$$C_{pr,i} = cF_i. \quad (2.100)$$

Estas seções de choque já foram determinadas e utilizadas por vários autores na literatura, e vamos apresentá-las abaixo (Ren, 1994; Ren, 1994a; Barton, 1989a).

$$\begin{aligned}
 C_{pr,z} = & \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1+|m|)!}{(n-|m|)!} \text{Re}[(a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^*) g_{n,m}^{TM} g_{n+1,m}^{*TM} \\
 & + (b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^*) g_{n,m}^{TE} g_{n+1,m}^{*TE}] \\
 & + m \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \text{Re}[i(2a_n b_n^* - a_n - b_n^*) g_{n,m}^{TM} g_{n,m}^{*TE}]
 \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
 C_{pr} = & \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{m=p-1 \neq 0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{(n-p)!} [ \\
 & (S_{m,n}^{p-1} + S_{n,m}^{-p} - 2U_{m,n}^{p-1} - 2U_{n,m}^{-p}) \left( \frac{\delta_{m,n+1}}{m^2} - \frac{\delta_{n,m+1}}{n^2} \right) + \\
 & \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \delta_{n,m} (T_{m,n}^{p-1} - T_{n,m}^{-p} - 2V_{m,n}^{p-1} + 2V_{n,m}^{-p}) ]
 \end{aligned} \quad (2.102)$$

Onde,

$$C_{pr,x} = \text{Re}[C_{pr}] \quad \text{e} \quad C_{pr,y} = \text{Im}[C_{pr}], \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned}
 U_{n,m,p} &= a_n a_m^* g_{np}^{TM} g_{m,p+1}^{*TM} + b_n b_m^* g_{np}^{TE} g_{m,p+1}^{*TE} \\
 V_{n,m,p} &= i b_n a_m^* g_{np}^{TE} g_{m,p+1}^{*TM} - i a_n b_m^* g_{np}^{TM} g_{m,p+1}^{*TE} \\
 S_{n,m,p} &= (a_n + a_m^*) g_{np}^{TM} g_{m,p+1}^{*TM} + (b_n + b_m^*) g_{np}^{TE} g_{m,p+1}^{*TE} \\
 V_{n,m,p} &= i(b_n + a_m^*) g_{np}^{TE} g_{m,p+1}^{*TM} - i(a_n + b_m^*) g_{np}^{TM} g_{m,p+1}^{*TE}
 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Estes coeficientes de expansão,  $g_{n,m}^{TM}$  e  $g_{n,m}^{TE}$ , são diferentes daqueles utilizados da nossa base vetorial, portanto vamos derivar quais seriam as seções de choque apropriadas para o nosso problema, na próxima seção.

## 2.2 Forças EM em uma Esfera

Para determinar a força EM em uma esfera dielétrica, não absorvedora em um meio não absorvedor, vamos utilizar o tensor de Stress de Maxwell definido no livro texto do Jackson (1999), como,

$$F_i = \oint T_{ij} n_j dA = \frac{1}{2} \text{Re} \oint [\epsilon E_i E_j^* + \mu H_i H_j^* - \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*) \delta_{ij}] n_j dA, \quad (2.105)$$

onde para os campos distantes vamos utilizar a solução assintótica. Vamos portanto integrar o tensor de Stress de Maxwell sob uma esfera onde  $kr \rightarrow \infty$ . Neste caso o elemento de área vai com  $dA = r^2 d\Omega$ , logo qualquer termo com uma dependência de  $1/r^s$  onde  $s > 2$  pode ser desprezado. Agora as soluções assintóticas das funções esféricas de Bessel são dadas por (A.19) e (A.20). Com a regra da mínima potência do denominador obtemos:

$$j'_n(kr) = (-i)^n \frac{e^{ikr}}{2kr} + (i)^n \frac{e^{-ikr}}{2kr} \quad \text{e} \quad h_n^{(1)}(kr) = \frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr} - \frac{(-i)^{n+1} e^{ikr}}{(kr)^2} \cong \frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr}. \quad (2.106)$$

Também percebe-se que os termos envolvendo  $z_n(kr)$  e  $z'_n(kr)$  permanecem, mas não  $z_n(kr)/kr$ . Podemos também desprezar o outro termo, dado por,

$$\begin{aligned} \nabla \times [z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)] &= \nabla z_n(kr) \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) + z_n(kr) \nabla \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) = \\ &= k z'_n(kr) [\hat{r} \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)] + z_n(kr) \nabla \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Pois este último é proporcional à  $z_n(kr)/kr$ . Neste caso podemos fazer:

$\nabla \times [z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)] \cong k z'_n(kr) [\hat{r} \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi)]$ , ou seja,

$$z_n(kr) \vec{X}_{nm}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{2kr} + (i)^{n+1} \frac{e^{-ikr}}{2kr} \\ 2(-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{2kr} \end{bmatrix} \vec{X}_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.108)$$

$$\nabla \times [z_n(kr)\vec{X}_{nm}(\theta, \phi)] = \begin{bmatrix} ik[(-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{2kr} - (i)^{n+1} \frac{e^{-ikr}}{2kr}] \\ 2ik(-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{2kr} \end{bmatrix} \hat{r} \times \vec{X}_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.109)$$

Desta forma os campos incidentes e espalhados ficam,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \sum_{n,m} \left[ \frac{i}{k_1} G_{nm}^{TM} \nabla \times j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) + G_{nm}^{TE} j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{k_1} a_n G_{nm}^{TM} \nabla \times h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) - b_n G_{nm}^{TE} h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right], \\ &= E_0 \frac{e^{ikr}}{2kr} \sum_{n,m} (-i)^{n+1} \left[ (1-2b_n) G_{nm}^{TE} \vec{X}_{nm} - (1-2a_n) G_{nm}^{TM} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} \right] \\ &\quad + E_0 \frac{e^{-ikr}}{2kr} \sum_{n,m} (i)^{n+1} \left[ G_{nm}^{TE} \vec{X}_{nm} + G_{nm}^{TM} \hat{r} \times \vec{X}_{n,m} \right] \end{aligned} \quad (2.110)$$

e a contribuição do campo elétrico para a força em uma esfera onde  $kr \rightarrow \infty$  seria,

$$\begin{aligned} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* &= -\frac{\varepsilon |E_0|^2}{2(kr)^2} \left\{ \sum_{n,m,p,q} (i)^{p-n} [(b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*} \right. \\ &\quad + (a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*}] (\vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^*) + [(a_n + b_p^* - 2a_n b_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TE*} \\ &\quad - (b_n + a_p^* - 2b_n a_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TM*}] \vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) - 2\text{Re}[e^{2ikr} \\ &\quad \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n+p} [(b_n G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*} - a_n G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*}) \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* \\ &\quad + (b_n G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TM*} + a_n G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TE*}) \vec{X}_{n,m} (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*)] \} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Onde utilizamos o fato de que os vetores,  $(\hat{r} \times \vec{X}_{n,m}) \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) = \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^*$  e  $\vec{X}_{p,q}^* \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{n,m}) = -\vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*)$ . Os termos que não contém pelo menos um  $a_n$  ou  $b_n$  foram subtraídos pois correspondiam ao termo do feixe incidente. Repetindo para o campo magnético obtêm-se,

$$\vec{H} = H_0 \sum_{n,m} \left[ -\frac{i}{k_1} G_{nm}^{TE} \nabla \times j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) + G_{nm}^{TM} j_n(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) + \frac{i}{k_1} b_n G_{nm}^{TE} \nabla \times h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) - a_n G_{nm}^{TM} h_n^{(1)}(k_1 r) \vec{X}_{n,m}(\theta, \phi) \right], \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* = & -\frac{\varepsilon |E_0|^2}{2(kr)^2} \left\{ \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} \right. \\ & + (b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}] (\vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^*) + [(a_n + b_p^* - 2a_n b_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TE*} \\ & - (b_n + a_p^* - 2b_n a_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TM*}] \vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) - 2 \operatorname{Re}[e^{2ikr} \\ & \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n+p} [(a_n G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} - b_n G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}) \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* \\ & - (b_n G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TM*} + a_n G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TE*}) \vec{X}_{n,m} (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*)] \} \end{aligned} \quad (2.113)$$

Somando as duas contribuições, obtemos finalmente a força óptica,

$$\begin{aligned} F_i = & \frac{-\varepsilon |E_0|^2}{4k^2} \operatorname{Re} \left[ \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} \right. \\ & + (b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}] \int \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \vec{X}_{n,m} \vec{X}_{p,q}^* d\Omega \\ & + \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + b_p^* - 2a_n b_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TE*} \\ & - (b_n + a_p^* - 2b_n a_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TM*}] \int \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) d\Omega \end{aligned} \quad (2.114)$$

A única diferença no cálculo das forças nas direções  $x$  e  $y$  são os termos  $\cos \phi$  e  $\sin \phi$ . No entanto as contas podem ser facilitadas notando-se que:

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} + (b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}] \int \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* d\Omega = \\ & = \sum_{n,m,p,q} (-i)^{p-n} [(a_p + a_n^* - 2a_p a_n^*) G_{pq}^{TM} G_{nm}^{TM*} + (b_p + b_n^* - 2b_p b_n^*) G_{pq}^{TE} G_{nm}^{TE*}] \int \vec{X}_{p,q} \cdot \vec{X}_{n,m}^* d\Omega = \\ & = \left\{ \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} + (b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}] \int \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* d\Omega \right\}^* \end{aligned} \quad (2.115)$$

e portanto,

$$\sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} + (b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}] \int \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* d\Omega = \text{Real} \cdot \quad (2.116)$$

No caso de  $C$  for um numero real, então temos

$$\begin{bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{bmatrix} C e^{i\phi} = \begin{bmatrix} C \cos \phi \\ C \sin \phi \end{bmatrix}, \quad (2.117)$$

logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} &= \frac{-\varepsilon |E_0|^2}{4k^2} \begin{bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{bmatrix} \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} \\ &+ (b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}] \int \sin \theta \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* e^{i\phi} d\Omega \\ &+ \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + b_p^* - 2a_n b_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TE*} \\ &- (b_n + a_p^* - 2b_n a_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TM*}] \int \sin \theta \vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) e^{i\phi} d\Omega \end{aligned}, \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{-\varepsilon |E_0|^2}{4k^2} \text{Re} \left[ \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + a_p^* - 2a_n a_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TM*} \right. \\ &+ (b_n + b_p^* - 2b_n b_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TE*}] \int \cos \theta \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* d\Omega \\ &+ \sum_{n,m,p,q} (-i)^{n-p} [(a_n + b_p^* - 2a_n b_p^*) G_{nm}^{TM} G_{pq}^{TE*} \\ &\left. - (b_n + a_p^* - 2b_n a_p^*) G_{nm}^{TE} G_{pq}^{TM*}] \int \cos \theta \vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Agora o problema é de avaliar as integrais  $I_1 = \int \cos \theta \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* d\Omega$ ,

$I_2 = \int \cos \theta \vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) d\Omega$ ,  $I_3 = \int \sin \theta \vec{X}_{n,m} \cdot \vec{X}_{p,q}^* e^{i\phi} d\Omega$  e  $I_4 = \int \sin \theta \vec{X}_{n,m} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{p,q}^*) e^{i\phi} d\Omega$ . Das

definições do vetor harmônico esférico da seção 2.1.4, podemos escrever,

$$\vec{X}_{nm} \cdot \vec{X}_{pq}^* = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)p(p+1)}} \left( \frac{m Y_{nm}}{\sin \theta} \frac{q Y_{pq}^*}{\sin \theta} + \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{pq}^*}{\partial \theta} \right), \quad (2.120)$$



$$\vec{X}_{nm} \cdot (\hat{r} \times \vec{X}_{pq}^*) = \frac{i}{\sqrt{n(n+1)p(p+1)}} \left( \frac{mY_{nm}}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{pq}^*}{\partial\theta} + \frac{qY_{pq}^*}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial\theta} \right). \quad (2.121)$$

Vamos reescrever as integrais em termos dos polinômios associados de Legendre utilizando as funções,

$$Y_{pq}^* = (i)^{|q|-q} \sqrt{\frac{2p+1}{4\pi} \frac{(p-|q|)!}{(p+|q|)!}} P_p^{|q|}(\cos\theta) e^{-iq\phi} \text{ e } Y_{nm} = (-i)^{|m|-m} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}. \quad (2.122)$$

Neste caso as integrais ficam,

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} i^{|q|-|m|-q+m} \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2p+1}{p(p+1)} \frac{(p-|q|)!}{(p+|q|)!} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \int \sin\theta \cos\theta \left( \frac{qP_p^{|q|}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{mP_n^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta} + \frac{dP_p^{|q|}(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \right) d\theta \int e^{-i(q-m)\phi} d\phi, \quad (2.123)$$

$$= \delta_{m,q} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2p+1}{p(p+1)} \frac{(p-|m|)!}{(p+|m|)!} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}$$

$$\int \sin\theta \cos\theta \left( m^2 \frac{P_p^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta} + \frac{dP_p^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \right) d\theta$$

$$I_2 = \frac{i}{4\pi} i^{|q|-|m|-q+m} \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2p+1}{p(p+1)} \frac{(p-|q|)!}{(p+|q|)!} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \int \sin\theta \cos\theta \left( \frac{mP_n^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{dP_p^{|q|}(\cos\theta)}{d\theta} + \frac{qP_p^{|q|}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \right) d\theta \int e^{-i(q-m)\phi} d\phi, \quad (2.124)$$

$$= \delta_{q,m} \frac{i}{2} m \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2p+1}{p(p+1)} \frac{(p-|m|)!}{(p+|m|)!} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}$$

$$\int \sin\theta \cos\theta \left( \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{dP_p^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} + \frac{P_p^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \right) d\theta$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \delta_{q,m+1} i^{|m+1|-|m|-1} \sqrt{\frac{2p+1}{p(p+1)} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{(p-|m+1|)!}{(p+|m+1|)!}} \int \sin^2\theta \left( m(m+1) \frac{P_p^{|m+1|}(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta)}{\sin\theta} + \frac{dP_p^{|m+1|}(\cos\theta)}{d\theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos\theta)}{d\theta} \right) d\theta, \quad (2.125)$$

$$I_4 = \delta_{q,m+1} \frac{i}{2} i^{|m+1|-|m|-1} \sqrt{\frac{2p+1}{p(p+1)} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-|m|)! (p-|m+1|)!}{(n+|m|)! (p+|m+1|)!}} \int \sin^2 \theta \left( m \frac{dP_p^{m+1}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{P_n^{|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} + (m+1) \frac{dP_n^{|m|}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{P_p^{m+1}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) d\theta, \quad (2.126)$$

Estas integrais em  $\theta$  são tabeladas (Gouesbet, 1988), derivadas a partir das relações de recorrência dos polinômios associados de Legendre, onde cada uma destas integrais vale respectivamente,

$$\int \sin \theta \cos \theta \left( \frac{m P_p^{m+1}(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{P_n^{|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{dP_p^{m+1}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos \theta)}{d\theta} \right) d\theta, \quad (2.127)$$

$$= \frac{2(n-1)(n+1)(n+|m|)!}{(2n-1)(2n+1)(n-1-|m|)!} \delta_{p,n-1} + \frac{2(p-1)(p+1)(p+|m|)!}{(2p-1)(2p+1)(p-1-|m|)!} \delta_{n,p-1}$$

$$\int \sin \theta \cos \theta \left( \frac{P_n^{|m|}(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{dP_p^{m+1}(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{P_p^{m+1}(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos \theta)}{d\theta} \right) d\theta, \quad (2.128)$$

$$= \frac{2(n+|m|)!}{(2n+1)(n-|m|)!} \delta_{n,p}$$

$$\int d\theta \sin^2 \theta \left( \frac{m(m+1)}{\sin^2 \theta} P_n^{|m|}(\cos \theta) P_p^{m+1}(\cos \theta) + \frac{dP_n^{|m|}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_p^{m+1}(\cos \theta)}{d\theta} \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{(2n+1)(2p+1)} \frac{(p+m+1)!}{(p-m-1)!} [(n-1)(n+1)\delta_{n,p+1} - (p-1)(p+1)\delta_{p,n+1}] & m \geq 0 \\ \frac{-2}{(2n+1)(2p+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [(n-1)(n+1)\delta_{n,p+1} - (p-1)(p+1)\delta_{p,n+1}] & m < 0 \end{cases}, \quad (2.129)$$

$$\int d\theta \sin^2 \theta \left( \frac{m}{\sin \theta} P_n^{|m|}(\cos \theta) \frac{dP_p^{m+1}(\cos \theta)}{d\theta} + \frac{m+1}{\sin \theta} \frac{dP_n^{|m|}(\cos \theta)}{d\theta} P_p^{m+1}(\cos \theta) \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!} \delta_{n,p} & m \geq 0 \\ \frac{-2}{2n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \delta_{n,p} & m < 0 \end{cases}. \quad (2.130)$$

Substituindo estes resultados nas integrais anteriores obtemos,

$$I_1 = \delta_{m,q} \frac{\delta_{p+1,n}}{(p+1)} \sqrt{\frac{p(p+2)}{(2p+1)(2p+3)}} (p+m+1)(p-m+1) \\ + \delta_{m,q} \frac{\delta_{n+1,p}}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}} (n+m+1)(n-m+1) , \quad (2.131)$$

$$I_2 = \delta_{q,m} \delta_{n,p} i m \frac{1}{n(n+1)} , \quad (2.132)$$

$$I_3 = \delta_{q,m+1} \frac{\delta_{n,p+1}}{(p+1)} \sqrt{\frac{p(p+2)}{(2p+3)(2p+1)}} (p-m+1)(p-m) \\ - \delta_{q,m+1} \frac{\delta_{p,n+1}}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}} (n+m+2)(n+m+1) , \quad (2.133)$$

$$I_4 = \delta_{q,m+1} \delta_{n,p} \frac{i}{n(n+1)} \sqrt{(n-m)(n+m+1)} . \quad (2.134)$$

Válidos para qualquer  $n$  e  $m$ . Substituindo estes na expressão da força longitudinal (2.119) e transversal (2.118), obtemos em termos de seção de choque

$$C_z = \frac{1}{2k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \\ \left\{ \sqrt{\frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \sum_{m=-n}^n \sqrt{(n+m+1)(n-m+1)} \{ \text{Re}[i(a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^*) G_{nm}^{TM} G_{n+1,m}^{TM*}] , (2.135) \right. \\ \left. + \text{Re}[i(b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^*) G_{nm}^{TE} G_{n+1,m}^{TE*}] \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \sum_{m=-n}^n m [\text{Re}[i(a_n + b_n^* - 2a_n b_n^*) G_{nm}^{TM} G_{nm}^{TE*}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} &= \frac{1}{4k^2} \begin{bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{bmatrix} \sum_{n=1} \frac{i}{(n+1)} \\
 &\left\{ \sqrt{\frac{n(n+2)}{(2n+3)(2n+1)}} \sum_{m=-n}^n \sqrt{(n+m+2)(n+m+1)} \right. \\
 &[(a_{n+1} + a_n^* - 2a_{n+1}a_n^*)G_{n+1,-(m+1)}^{TM} G_{n,-m}^{TM*} + (a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^*)G_{nm}^{TM} G_{n+1,m+1}^{TM*} + . (2.136) \\
 &(b_{n+1} + b_n^* - 2b_{n+1}b_n^*)G_{n+1,-(m+1)}^{TE} G_{n,-m}^{TE*} + (b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^*)G_{nm}^{TE} G_{n+1,m+1}^{TE*} ] \\
 &- \frac{1}{n} \sum_{m=-n}^n \sqrt{(n+m+2)(n+m+1)} \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \\
 &\left. [(a_n + b_n^* - 2a_n b_n^*)G_{nm}^{TM} G_{n,m+1}^{TE*} - (b_n + a_n^* - 2b_n a_n^*)G_{nm}^{TE} G_{n,m+1}^{TM*}] \right\}
 \end{aligned}$$

Portanto determinando os coeficientes de forma de um feixe incidente arbitrário podemos determinar a força óptica através das relações, (2.135) e (2.136) em uma microesfera de tamanho arbitrário. Resta-nos ainda o problema de determinar o campo EM da onda incidente.

## 2.3 O Feixe Incidente

A maioria das investigações de focalização por uma abertura numérica alta, baseiam-se na óptica geométrica e na teoria da difração escalar. No caso da óptica geométrica, a natureza ondulatória do feixe de aprisionamento é ignorada, portanto a magnitude da força de aprisionamento é independente do tamanho da partícula e vale somente para partículas grandes ( $\gg \lambda$ ). Já no caso da interação de um feixe Gaussiano corrigido até quinta-ordem (Barton, 1989) a dependência da força com o tamanho é aplicável para partículas pequenas (da ordem de  $\lambda$ ), porém este feixe Gaussiano de quinta ordem ignora o efeito de difração por uma alta abertura numérica de uma objetiva e logo não representa corretamente as fases e a distribuição de polarização dos campos EM na vizinhança do foco. Além disto, nenhum dos métodos permite modelar a aberração esférica geralmente presente em

um experimento de aprisionamento devido a variação abrupta do índice de refração na interface entre o óleo de imersão (e a lamínula) com a solução aquosa onde está a partícula.

O desenvolvimento desta teoria segue dos trabalhos de Wolf (1959) e Richards (1959) para poder determinar o campo elétrico e magnético no foco de uma objetiva de alta abertura numérica através da representação do espectro angular e mais recentemente o trabalho de Torok (1995) que inclui o problema de aberração axial. Esta abordagem mas com cálculos apenas numéricos foi elaborado por Ganic (2004) e no caso da presença de uma interface dielétrica no trabalho de Im (2003). Estas referências e as referências citadas por estes foram utilizadas para apresentar a teoria desta seção. Teoria para a força óptica em termos de expansão em ondas parciais também foi desenvolvida por Neto (2000).

## 2.3.1 Representação do Espectro Angular

Nesta seção introduzo a Representação do Espectro Angular (REA), também conhecido como Expansão de Weyl devido ao seu idealizador (Weyl, 1919), é uma técnica matemática para descrever os campos em um meio homogêneo. Mandel (1995), Wolf (1959), Richards (1959) e Novotny (2006) fazem uso desta técnica para descrever os campos focalizados. Nesta representação os campos EM são descritos como uma superposição de ondas planas que são soluções intuitivas das equações de Maxwell, tornando-se um método poderoso para a descrição da propagação dos feixes de laser e focalizações. No limite paraxial o REA torna-se idêntico a método de Óptica de Fourier.

Vamos supor um campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r})$  em qualquer ponto do espaço, neste espaço incluímos um eixo arbitrário- $z$  e consideramos o campo elétrico no plano  $z$  constante. Neste plano podemos avaliar a transformada de Fourier do campo elétrico como,

$$\vec{e}(k_x, k_y; z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(x, y, z) e^{-i[k_x x + k_y y]} dx dy, \quad (2.137)$$

onde  $k_x$  e  $k_y$  são as freqüências espaciais correspondentes as coordenadas  $x$  e  $y$ .

A transformada inversa é dada por

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}(k_x, k_y; z) e^{i[k_x x + k_y y]} dk_x dk_y. \quad (2.138)$$

Note que as integrais de Fourier valem para cada componente do vetor do espaço real e recíproco. Vamos agora supor que o nosso meio seja linear, homogêneo, isotrópico e livre de fontes (pelo menos no plano- $z$ ). Desta maneira um campo óptico com dependência harmônica de  $\omega$  satisfaz a equação vetorial de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (2.139)$$

onde  $k = n\omega/c$  e  $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ . Definindo  $k_z \equiv \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$  com  $\text{Im}(k_z) \geq 0$  podemos inserir a representação de Fourier do campo (2.138) na equação de Helmholtz onde obtemos,

$$\vec{e}(k_x, k_y; z) = \vec{e}(k_x, k_y; 0) e^{\pm i k_z z}, \quad (2.140)$$

onde esta equação descreve como um espectro de Fourier do campo elétrico no plano imagem ( $z$  constante) pode ser calculado multiplicando-se o espectro no plano objeto em  $z = 0$  por um fator  $e^{\pm i k_z z}$  (propagador). O sinal indica em qual dos semi-espacos a onda está se propagando. A definição de  $k_z$  com a parte imaginária positiva nos dá uma solução finita para todo o espaço  $z$ . Inserindo-se portanto este resultado na equação (2.138), obtemos

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}(k_x, k_y; 0) e^{i[k_x x + k_y y \pm k_z z]} dk_x dk_y. \quad (2.141)$$

Esta equação é conhecida como REA. Para o campo magnético  $\vec{H}$  a equação é similar. Falta agora impor as restrições  $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{H} = 0$  para que os espectros angulares dos campos elétricos e magnéticos sejam soluções rigorosas das equações de Maxwell. Esta condição restringe o vetor  $k$  para direções perpendiculares aos campos ( $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$ ). Para o caso de um dielétrico sem absorção o índice de refração é uma grandeza real e positiva. O numero de onda  $k_z$  é então uma quantidade real ou imaginária, fazendo com que o termo  $e^{\pm i k_z z}$  seja uma função oscilatória ou um decaimento exponencial. Para certos valores do par  $k_x$  e  $k_y$  temos duas soluções características,

$$\begin{aligned} e^{i[k_x x + k_y y]} e^{\pm i|k_z|z} & \quad k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 \\ e^{i[k_x x + k_y y]} e^{-|k_z||z|} & \quad k_x^2 + k_y^2 > k^2 \end{aligned} \quad (2.142)$$

Onde no primeiro caso temos soluções de ondas planas e no segundo soluções de onda evanescentes. O REA portanto é uma superposição destes dois tipos de ondas, planas e evanescentes. No nosso caso o plano imagem está suficientemente longe do plano objeto, portanto as contribuições do domínio de decaimento exponencial (ondas evanescentes) é nula e a integração é então reduzida para a região  $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ .

## 2.3.2 Feixe Paraxial

Quando os campos se propagam ao longo de uma direção  $z$  ( $\vec{k}$  quase paralelo ao eixo- $z$ ) e divergem muito lentamente na direção transversal ( $k_x$  e  $k_y$  muito pequenos quando comparados a  $k$ ), como na propagação de um feixe laser, podemos fazer uma aproximação paraxial. Expandimos em série até primeira ordem,

$$k_z = k \sqrt{1 - (k_x^2 + k_y^2)/k^2} \approx k - \frac{(k_x^2 + k_y^2)}{2k}. \quad (2.143)$$

Esta aproximação simplifica bastante a integração e representa o caso de feixe com focalização fraca.

Vamos tratar agora do feixe Gaussiano, vamos considerá-lo linearmente polarizado, com uma distribuição Gaussiana na cintura do feixe (denotado por  $\omega_0$ ),

$$\vec{E}(x', y', 0) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{\omega_0^2}}, \quad (2.144)$$

onde as linhas denotam as coordenadas transversal no plano objeto ( $z = 0$ ) e sem linha no plano imagem ( $z = \text{constante}$ ). O espectro de Fourier em  $z = 0$  é, então,

$$\begin{aligned} \vec{e}(k_x, k_y; 0) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0 e^{-\frac{x'^2 + y'^2}{\omega_0^2}} e^{-i[k_x x' + k_y y']} dx' dy' \\ &= \vec{E}_0 \frac{\omega_0^2}{4\pi} e^{-\frac{(k_x^2 + k_y^2)\omega_0^2}{4}} \end{aligned}, \quad (2.145)$$

que é também uma função Gaussiana. Inserindo a equação anterior na equação do REA (2.141) e usando a aproximação paraxial (2.143), obtemos

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0 \frac{\omega_0^2}{4\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(k_x^2 + k_y^2)}{4} \left( \frac{\omega_0^2}{k} + \frac{z}{k} \right)} e^{i[k_x x + k_y y]} dk_x dk_y. \quad (2.146)$$

Integrando obtemos o resultado da representação paraxial de um feixe Gaussiano,

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{E}_0 e^{ikz}}{(1 + 2iz/k\omega_0^2)} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{\omega_0^2} \frac{1}{(1 + 2iz/k\omega_0^2)}}. \quad (2.147)$$

Podemos reescrever esta equação usando os parâmetros  $z_0 = k\omega_0^2/2$  (comprimento de Rayleigh) e  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,



$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)}} e^{i[kz - \eta(z) + k\rho^2 / 2R(z)]}, \quad (2.148)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \omega_0 \sqrt{1 + z^2 / z_0^2} && \text{cintura do feixe} \\ R(z) &= z \left( 1 + z_0^2 / z^2 \right) && \text{raio de curvatura .} \\ \eta(z) &= \arctg(z / z_0) && \text{correção da fase} \end{aligned} \quad (2.149)$$

É importante notar que uma vez que a aproximação paraxial é introduzida o campo elétrico não satisfaz mais as equações de Maxwell. O erro torna-se tanto maior quanto menor for a cintura do feixe. Quando  $\omega_0$  torna-se comparável ao comprimento de onda no meio, mais termos da expansão em série de (2.143) devem ser incluídos. Porém para feixes altamente focalizados estas séries convergem muito mal e uma descrição mais acurada torna-se necessária.

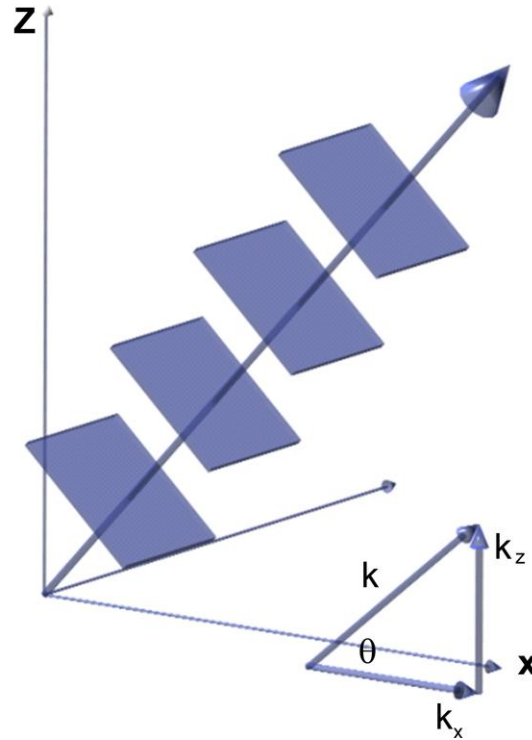


Figura 2.9 - Uma onda plana viajando num ângulo pequeno  $\theta$  em relação ao eixo óptico.

Deve-se enfatizar aqui que a aproximação paraxial só é aceitável para focalizações com ângulo de cone de até  $30^\circ$ , pois acima disto, correções significativas tornam-se necessárias (Siegman, 1986). Considere um feixe como uma superposição de ondas planas, propagando-se em um ângulo com relação a um eixo-  $z$  (Figura 2.9),

A dependencia axial e transversal desta componente de onda plana são dadas por,

$$E(x, z) = e^{-ik(x\sin\theta + z\cos\theta)} = u(x, z)e^{-ikz}. \quad (2.150)$$

A forma exata para a amplitude de onda reduzida  $u(x, y, z)$  e sua forma aproximada dentro da aproximação paraxial é então dada por,

$$u(x, z) = e^{-ik(x\sin\theta + z(1-\cos\theta))} \approx e^{-ik(x\theta - z\theta^2/2)}. \quad (2.151)$$

A primeira e segunda derivadas normalizadas de  $u(x, z)$  na direção transversal são,

$$-i \frac{2k}{u} \frac{\partial u}{\partial z} = 2k^2(1 - \cos\theta) \approx k^2\theta^2, \quad (2.152)$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 \sin^2\theta \approx -k^2\theta^2. \quad (2.153)$$

Porém a segunda derivada na direção  $z$  tem a forma,

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k^2(1 - \cos\theta)^2 \approx -\frac{k^2\theta^4}{4}. \quad (2.154)$$

Esta derivada em particular é menor que as anteriores por um fator  $(\theta/2)^2$  uma razão que será  $\ll 1$  desde que  $\theta \leq 1/2$  radianos.

Podemos concluir que enquanto as componentes de onda plana que compõem o feixe óptico fazem um ângulo de  $\theta \leq 1/2$  radianos, ou menores que de  $30^\circ$ , os termos  $\partial^2 u / \partial z^2$  serão, pelo menos, de uma ordem de magnitude inferior que os outros dois termos, de acordo com a aproximação paraxial básica.

### 2.3.3 Campos Para Regiões Distantes

Estamos interessados na aproximação para campos distantes no ponto  $\vec{r}_\infty$ , muito longe do plano objeto. Para isso vamos introduzir um vetor unitário adimensional  $\hat{s}$  na direção de  $\vec{r}_\infty$  dado por,

$$\hat{s} = (s_x, s_y, s_z > 0) = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} > 0 \right), \quad (2.155)$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  é a distância de  $\vec{r}_\infty$  até a origem. Para determinar o campo distante  $\vec{E}_\infty$  vamos fazer  $r \rightarrow \infty$  e reescrever (2.141) como,

$$\vec{E}_\infty(s_x, s_y, s_z) = \lim_{kr \rightarrow \infty} \iint_{(k_x^2 + k_y^2) \leq k^2} \vec{e}(k_x, k_y; 0) e^{ikr \left[ \frac{k_x}{k} s_x + \frac{k_y}{k} s_y + \frac{k_z}{k} s_z \right]} dk_x dk_y. \quad (2.156)$$

A região de integração fica restrita a este domínio pois devido ao decaimento das exponenciais das ondas evanescentes estas não contribuem no infinito. A integral dupla é avaliada através do método de fase estacionária (Mandel, 1995; Born, 1970).

A medida que  $kr \rightarrow \infty$  esta integral irá oscilar rapidamente, havendo uma tendência de cancelamento das contribuições positivas com as negativas. Porém este cancelamento não será completo pois existem pontos no intervalo de integração onde a fase é estacionária, i.e. nos pontos  $k_{x_0}$  e  $k_{y_0}$ , que satisfazem

$$\nabla \Phi(k_x, k_y) = 0. \quad (2.157)$$

Sendo  $\Phi(k_x, k_y) = \frac{k_x}{k} s_x + \frac{k_y}{k} s_y + \frac{k_z}{k} s_z$  e  $k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$ . Portanto o comportamento assintótico da integral é determinado pelo integrando nestes pontos estacionários. Em torno deste ponto podemos expandir a fase em série de Taylor.

$$\begin{aligned}\Phi(k_x, k_y) &\approx \Phi(k_{x_0}, k_{y_0}) + \frac{1}{2}(\Phi_{xx}(k_x - k_{x_0})^2 + 2\Phi_{xy}(k_x - k_{x_0})(k_y - k_{y_0}) + \Phi_{yy}(k_y - k_{y_0})^2) \\ &= \Phi(k_{x_0}, k_{y_0}) + \frac{1}{2}(\Phi_{xx}\xi^2 + 2\Phi_{xy}\xi\eta + \Phi_{yy}\eta^2)\end{aligned}\quad (2.158)$$

A integral torna-se então,

$$\vec{E}_\infty(s_x, s_y, s_z) = \vec{e}(k_{x_0}, k_{y_0}; 0) e^{ikr \left[ \frac{k_{x_0}}{k} s_x + \frac{k_{y_0}}{k} s_y + \frac{k_{z_0}}{k} s_z \right]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{kr}{2} (\Phi_{xx}\xi^2 + 2\Phi_{xy}\xi\eta + \Phi_{yy}\eta^2)} dk_x dk_y. \quad (2.159)$$

Agora basta completar o quadrado:

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}\xi^2 + 2\Phi_{xy}\xi\eta + \Phi_{yy}\eta^2 &= \Phi_{xx} \left[ \xi^2 + 2\frac{\Phi_{xy}}{\Phi_{xx}}\xi\eta + \frac{\Phi_{xy}^2}{\Phi_{xx}^2}\eta^2 - \frac{\Phi_{xy}^2}{\Phi_{xx}^2}\eta^2 \right] + \Phi_{yy}\eta^2 \\ &= \Phi_{xx} \left[ \xi + \frac{\Phi_{xy}}{\Phi_{xx}}\eta \right]^2 + \frac{\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2}{\Phi_{xx}}\eta^2.\end{aligned}\quad (2.160)$$

Chamando  $\nu = \xi + \frac{\Phi_{xy}}{\Phi_{xx}}\eta$  chegamos a:

$$\begin{aligned}\vec{E}_\infty(s_x, s_y, s_z) &= \vec{e}(k_{x_0}, k_{y_0}; 0) e^{ikr \left[ \frac{k_{x_0}}{k} s_x + \frac{k_{y_0}}{k} s_y + \frac{k_{z_0}}{k} s_z \right]} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{kr}{2} \Phi_{xx} \nu^2} e^{i \frac{kr}{2} \frac{\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2}{\Phi_{xx}} \eta^2} d\nu d\eta \\ &= 4\vec{e}(k_{x_0}, k_{y_0}; 0) e^{ikr \left[ \frac{k_{x_0}}{k} s_x + \frac{k_{y_0}}{k} s_y + \frac{k_{z_0}}{k} s_z \right]} \int_0^\infty e^{i \frac{kr}{2} \Phi_{xx} \nu^2} d\nu \int_0^\infty e^{i \frac{kr}{2} \frac{\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2}{\Phi_{xx}} \eta^2} d\eta\end{aligned}\quad (2.161)$$

onde estas integrais são as integrais de Fresnel e valem,

$$\int_0^\infty e^{iau^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{\pm i\pi/4}, \quad (2.162)$$

onde o sinal é tomado de acordo com o sinal de  $a$ . Antes de prosseguir vamos determinar os pontos estacionários.

$$\Phi_x|_{k_{x_0}} = \frac{1}{k} \left( s_x + s_z \frac{\partial}{\partial k_x} k_z \right) \Big|_{k_{x_0}} = \frac{1}{k} \left( s_x - s_z \frac{k_{x_0}}{k_{z_0}} \right) = 0, \quad (2.163)$$

$$\Phi_y|_{k_{y_0}} = \frac{1}{k} \left( s_y + s_z \frac{\partial}{\partial k_y} k_z \right) \Big|_{k_{y_0}} = \frac{1}{k} \left( s_y - s_z \frac{k_{y_0}}{k_{z_0}} \right) = 0, \quad (2.164)$$

e

$$k_{z_0} = \sqrt{k^2 - (k_{x_0}^2 + k_{y_0}^2)} = \sqrt{k^2 - k_{z_0}^2 (s_{x_0}^2 + s_{y_0}^2) / s_z^2}.$$

$$\therefore k_{z_0} = s_z k \quad (2.165)$$

Portanto o ponto de fase estacionária é em  $P_1(s_x k, s_y k, s_z k)$ . Neste ponto temos,

$$\Phi_{xx}|_{P_1} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k_x} \left( s_x - s_z \frac{k_x}{k_z} \right) \Big|_{P_1} = \frac{-s_z}{k k_z} \left( 1 + \frac{k_x^2}{k_z^2} \right) \Big|_{P_1} = \frac{-1}{k^2} \left[ 1 + \left( \frac{s_x}{s_z} \right)^2 \right] < 0, \quad (2.166)$$

$$\Phi_{yy}|_{P_1} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k_y} \left( s_y - s_z \frac{k_y}{k_z} \right) \Big|_{P_1} = \frac{-s_z}{k k_z} \left( 1 + \frac{k_y^2}{k_z^2} \right) \Big|_{P_1} = \frac{-1}{k^2} \left[ 1 + \left( \frac{s_y}{s_z} \right)^2 \right] < 0, \quad (2.167)$$

$$\Phi_{xy}|_{P_1} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k_y} \left( s_x - s_z \frac{k_x}{k_z} \right) \Big|_{P_1} = \frac{-s_z k_x k_y}{k k_z^3} \Big|_{P_1} = \frac{-1}{k^2} \frac{s_x s_y}{s_z^2}. \quad (2.168)$$

Portanto o termo da segunda integral de Fresnel torna-se,

$$(\Phi_{xx} \Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2) / \Phi_{xx} = \frac{-1}{k^2 (s_z^2 + s_x^2)}. \quad (2.169)$$

O resultado de (2.156) pode então ser expresso como,

$$\begin{aligned} \vec{E}_\infty(s_x, s_y, s_z) &= \vec{e}(s_x k, s_y k; 0) e^{ikr} \left( \sqrt{\frac{2\pi k s_z^2}{r(s_z^2 + s_x^2)}} e^{-i\pi/4} \right) \left( \sqrt{\frac{2\pi k (s_z^2 + s_x^2)}{r}} e^{-i\pi/4} \right). \\ &= -2\pi i k s_z \vec{e}(s_x k, s_y k; 0) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (2.170)$$

Esta equação nos diz como os campos longínquos são definidos inteiramente pelo espectro de Fourier,  $\vec{e}(ks_x, ks_y; 0)$ , no plano objeto, se trocarmos  $k_x \rightarrow ks_x$  e  $k_y \rightarrow ks_y$ . Isto implica que o vetor unitário satisfaz,

$$\hat{s} = (s_x, s_y, s_z) = \left( \frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}, \frac{k_z}{k} \right), \quad (2.171)$$

o que significa que somente uma onda plana com o vetor de onda  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  do espectro angular em  $z=0$  contribui para o campo longínquo no ponto localizado na direção do vetor unitário  $\hat{s}$ . O efeito de todas as outras ondas planas é cancelado por interferência destrutiva. Combinando as equações (2.170) e (2.171) podemos escrever o espectro de Fourier  $\vec{e}$  em termos do campo distante como,

$$\vec{e}(k_x, k_y; 0) = \frac{ie^{-ikr}}{2\pi k_z} \vec{E}_\infty(k_x, k_y). \quad (2.172)$$

Esta equação pode ser substituída na equação do REA (2.141), obtendo-se,

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{ie^{-ikr}}{2\pi} \iint_{(k_x^2 + k_y^2) \leq k^2} \vec{E}_\infty(k_x, k_y) e^{i[k_x x + k_y y + k_z z]} \frac{dk_x dk_y}{k_z}. \quad (2.173)$$

O campo magnético tem a mesma expressão em REA do campo elétrico.

## 2.3.4 Campos Focalizados

Para a pinça óptica é mais eficiente ter um campo altamente focalizado para o aprisionamento. Os campos de um laser focalizados são determinados pelas condições de contorno do elemento de focalização e do campo óptico incidente.

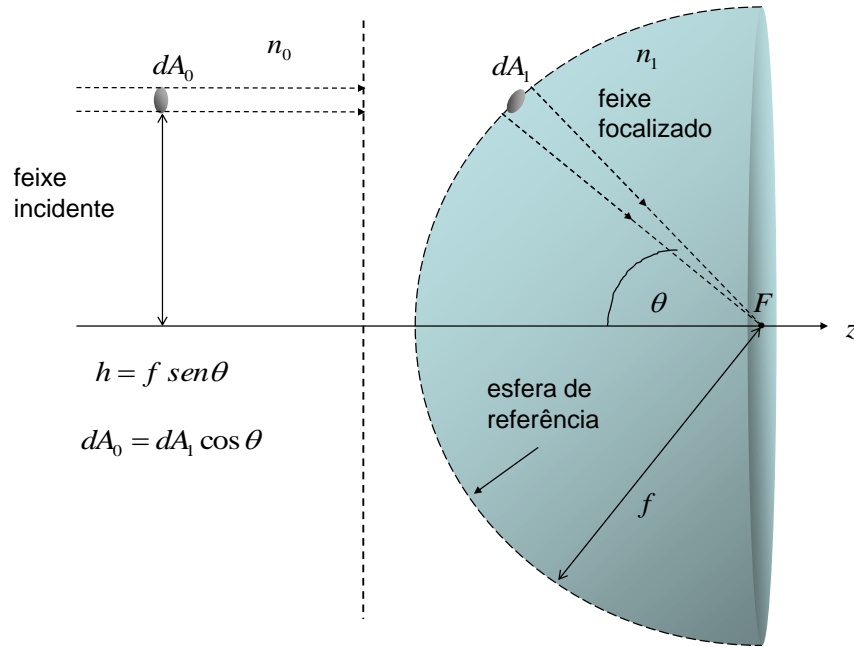
Os campos na vizinhança da lente podem ser formulados pelas leis da óptica geométrica. Nesta aproximação o comprimento de onda finito é desprezado ( $k \rightarrow \infty$ )

e a energia é transportada ao longo do feixe/raio. A densidade média de energia propaga-se com velocidade  $v = c/n$  na direção perpendicular das frentes de ondas geométricas. A lente é um sistema óptico aplanético (Apêndice B), portanto satisfaz a condição seno,

$$h = f \sin \theta, \quad (2.174)$$

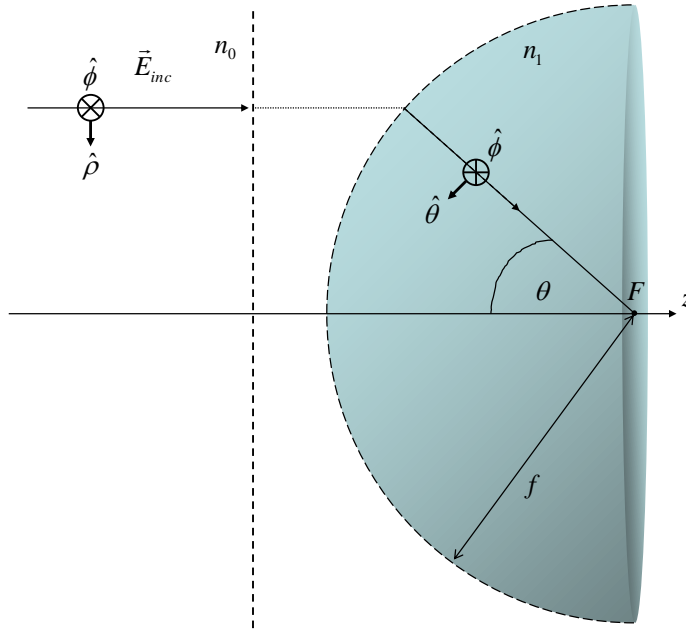
e a condição de conservação de energia,

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_0| \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \theta}, \quad (2.175)$$



**Figura 2.10 – Detalhes da condição seno e leis de intensidade da óptica geométrica.**

onde  $h$  é a distância entre o feixe e o eixo óptico,  $f$  é a distância focal da objetiva e  $\theta$  é o ângulo de divergência. Portanto através da condição seno o nosso sistema óptico pode ser representado de acordo com a Figura 2.11.



**Figura 2.11 – Representação geométrica de um sistema aplanético e coordenadas utilizadas.**

Os feixes incidentes são refratados pela esfera de referência de raio  $f$ . Note que neste caso todos os caminhos até o foco  $F$  tem o mesmo atraso de fase, permitindo então ignorar o atraso de fase entre feixes diferentes. Denota-se um ponto arbitrário nesta esfera de referência (região tracejada) por  $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$  e o campo arbitrário perto do foco por  $(x, y, z)$ . Estes pontos também podem ser representados em coordenadas esféricas por  $(f, \theta, \phi)$ .

O feixe incidente antes de ser focalizado é descrito pelos vetores unitários  $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$  como demonstrado na Figura 2.11. Os vetores unitários  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\phi}$  pertencem ao sistema de coordenada cilíndrica do feixe incidente, já os vetores  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$  pertencem ao sistema de coordenadas esféricas do feixe focalizado. O feixe focalizado é calculado convenientemente dividindo-se o campo vetorial incidente  $\vec{E}_{inc}$  em duas componentes denotados por  $\vec{E}_{inc}^{(s)}$  e  $\vec{E}_{inc}^{(p)}$ , representando as polarizações  $s$  e  $p$ . Em termos dos vetores unitários podemos escrever estes dois campos como

$$\vec{E}_{inc}^{(s)} = [\vec{E}_{inc} \cdot \hat{\phi}] \hat{\phi} \quad \vec{E}_{inc}^{(p)} = [\vec{E}_{inc} \cdot \hat{\rho}] \hat{\theta}. \quad (2.176)$$



Estas componentes são mapeadas diferentemente, o vetor  $\hat{\phi}$  permanece inalterado já o vetor  $\hat{\rho}$  é mapeado para  $\hat{\theta}$  (Richards e Wolf (1959)). Portanto o campo elétrico total refratado, denotado por  $\vec{E}_\infty$  é denotado por,

$$\vec{E}_\infty = \left[ t^s [\vec{E}_{inc} \cdot \hat{\phi}] \hat{\phi} + t^p [\vec{E}_{inc} \cdot \hat{\rho}] \hat{\theta} \right] \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \theta} . \quad (2.177)$$

O termo da raiz representa a conservação de energia e cada coeficiente de transmissão é dado por,

$$\begin{aligned} t^s &= \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + n_2/n_1 \cos \theta_2} , \\ t^p &= \frac{2 \cos \theta_1}{n_2/n_1 \cos \theta_1 + \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (2.178)$$

onde,

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1} . \quad (2.179)$$

Os vetores unitários  $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$  podem ser representados em vetores unitários em coordenadas Cartesianas  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  pelas relações,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \end{aligned} . \quad (2.180)$$

Substituindo estes vetores na equação (2.177) obtemos,

$$\begin{aligned} \vec{E}_\infty(\theta, \phi) = & t^s(\theta) \left[ \vec{E}_{inc}(\theta, \phi) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos\theta} \\ & + t^p(\theta) \left[ \vec{E}_{inc}(\theta, \phi) \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\theta \\ \sin\phi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos\theta}, \end{aligned} \quad (2.181)$$

que representa o campo em componentes cartesianas logo do lado de dentro da esfera de referência. Podemos também expressar o campo em termos das frequências espaciais  $k_x$  e  $k_y$  utilizando as substituições,

$$k_x = k \sin\theta \cos\phi \quad k_y = k \sin\theta \sin\phi \quad k_z = k \cos\theta. \quad (2.182)$$

O campo distante na esfera de referência na forma de  $\vec{E}_\infty(k_x, k_y, k_z)$  e pode ser inserido na equação (2.173) para calcular os campos na região focal. Portanto os campos na vizinhança do foco são determinados inteiramente pelo campo distante na esfera de referência.

Devido à simetria do problema é conveniente trabalhar com a equação (2.173) em termos dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  ao invés de  $k_x$  e  $k_y$ . Isto é feito usando as substituições (2.182) e expressando as coordenadas transversais do foco como  $x = \rho \cos\phi$  e  $y = \rho \sin\phi$ . Finalizando, para mudar a integração plana sobre  $k_x$  e  $k_y$  para uma esférica em  $\theta$  e  $\phi$  as diferenciais são alteradas para,

$$\frac{dk_x dk_y}{k_z} = k \sin\theta d\theta d\phi, \quad (2.183)$$

onde  $k_z = k \cos\theta$ . Podemos então representar o REA de um campo focalizado por,

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \frac{ikf e^{-ikf}}{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \int_0^{2\pi} \vec{E}_\infty(\theta, \phi) e^{ikz \cos\theta} e^{ik\rho \sin\theta \cos(\phi-\phi)} \sin\theta d\phi d\theta. \quad (2.184)$$

A integração também foi limitada na faixa até  $\theta_{\max}$  devido à extensão finita da lente. Este ângulo máximo é obtido da abertura numérica da lente em questão, é dado por  $NA = n \sin \theta_{\max}$ . Além do mais, como todos os campos se propagam na direção  $z$  positiva, somente o sinal '+' foi mantido. Portanto vimos como um campo paraxial é focalizado por uma lente aplanética e o campo focal determinado.

Tipicamente na entrada da objetiva existe uma abertura de aproximadamente 5 milímetros de diâmetro, e para fazer uso de toda a abertura numérica da objetiva o feixe incidente deve preencher ou sobre preencher essa abertura. Devido então a este diâmetro grande e baixo ângulo de convergência do feixe incidente é razoável uma aproximação paraxial, desta forma temos,

$$\vec{E}_{inc} = E_{inc} \hat{x}. \quad (2.185)$$

Como o feixe incidente viajando na direção  $\hat{z}$ , utilizando a equação (2.11) podemos escrever o campo magnético correspondente ao campo elétrico acima, como,

$$\vec{H}_{inc} = H_{inc} \hat{y} = \frac{E_{inc}}{Z} \hat{y}. \quad (2.186)$$

Além do mais, vamos supor que a objetiva tem uma boa película anti-refletora tal que podemos desprezar os coeficientes de transmissão de Fresnel ( $t^s(\theta) = t^p(\theta) = 1$ ). Portanto podemos escrever o campo distante como,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\infty}(\theta, \phi) &= E_{inc}(\theta, \phi) \left[ \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \right] \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \theta} \\ &= \frac{E_{inc}(\theta, \phi)}{2} \begin{bmatrix} (1 + \cos \theta) - (1 - \cos \theta) \cos 2\phi \\ - (1 - \cos \theta) \sin 2\phi \\ - 2 \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \theta}, \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\infty}(\theta, \phi) &= \frac{E_{inc}(\theta, \phi)}{Z} \left[ \sin \phi \hat{\theta} - \cos \phi \hat{\phi} \right] \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \theta} \\ &= \frac{H_{inc}(\theta, \phi)}{2} \begin{bmatrix} - (1 - \cos \theta) \sin 2\phi \\ (1 + \cos \theta) + (1 - \cos \theta) \cos 2\phi \\ - 2 \sin \phi \sin \theta \end{bmatrix} \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \theta}, \end{aligned} \quad (2.188)$$

onde este último está em coordenadas cartesianas. Resta agora especificar o perfil da amplitude do feixe incidente  $E_{inc}$ . Escrevendo as coordenadas  $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$  da Figura 2.11 por  $(f, \theta, \phi)$  temos,

$$E_{inc}(\theta, \phi) = E_0 e^{-(x_\infty^2 + y_\infty^2)/\omega_a^2} = E_0 e^{-f^2 \sin^2 \theta / \omega_a^2}. \quad (2.189)$$

Este feixe tem simetria azimutal no modo  $TEM_{0,0}$  e por estar centrado na objetiva. Note que aqui a largura do feixe,  $\omega_a$ , é na entrada da abertura da objetiva. O campo elétrico no foco irá depender de quanto o feixe incidente foi expandido em relação ao tamanho da lente. Como o raio de abertura da lente vale  $f \sin \theta_{\max}$ , defini-se o fator de preenchimento como,

$$f_0 = \frac{\omega_a}{f \sin \theta_{\max}}. \quad (2.190)$$

Isto permite redefinir a função exponencial do campo incidente como,

$$f_\omega(\theta) = e^{-\frac{\sin^2 \theta}{f_0^2 \sin^2 \theta_{\max}}}, \quad (2.191)$$

conhecida também na literatura como função de apodização. Podemos então resolver o problema integrando (2.184) primeiramente em  $\phi$  analiticamente usando as relações,

$$\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{Bmatrix} e^{ix \cos(\phi - \varphi)} d\phi = 2\pi (i)^n J_n(x) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}. \quad (2.192)$$

Obtendo então as expressões dos campos como,

$$\vec{E}^{(x)}(\rho, \varphi, z) = \frac{ikf}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} E_0 e^{-ikf} \begin{bmatrix} I_0(\rho, z) + I_2(\rho, z) \cos 2\varphi \\ I_2(\rho, z) \sin 2\varphi \\ -2iI_1(\rho, z) \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.193)$$

$$\vec{H}^{(x)}(\rho, \varphi, z) = \frac{ikf}{2Z} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} E_0 e^{-ikf} \begin{bmatrix} I_2(\rho, z) \sin 2\varphi \\ I_0(\rho, z) - I_2(\rho, z) \cos 2\varphi \\ -2iI_1(\rho, z) \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.194)$$

Caso este feixe incidente esteja polarizado na direção- $y$ , segue-se o mesmo raciocínio e obtêm-se,

$$\vec{E}^{(y)}(\rho, \varphi, z) = \frac{ikf}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} E_0 e^{-ikf} \begin{bmatrix} I_2(\rho, z) \sin 2\varphi \\ I_0(\rho, z) - I_2(\rho, z) \cos 2\varphi \\ -2iI_1(\rho, z) \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.195)$$

$$\vec{H}^{(y)}(\rho, \varphi, z) = \frac{ikf}{2Z} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} E_0 e^{-ikf} \begin{bmatrix} I_0(\rho, z) + I_2(\rho, z) \cos 2\varphi \\ I_2(\rho, z) \sin 2\varphi \\ -2iI_1(\rho, z) \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (2.196)$$

onde as integrais em  $\theta$  foram abreviadas como,

$$I_0(\rho, z) = \int_0^{\theta_{\max}} f_{\omega}(\theta) \sqrt{\cos \theta} \sin \theta (1 + \cos \theta) J_0(k\rho \sin \theta) e^{ikz \cos \theta} d\theta, \quad (2.197)$$

$$I_1(\rho, z) = \int_0^{\theta_{\max}} f_{\omega}(\theta) \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta J_1(k\rho \sin \theta) e^{ikz \cos \theta} d\theta, \quad (2.198)$$

$$I_2(\rho, z) = \int_0^{\theta_{\max}} f_{\omega}(\theta) \sqrt{\cos \theta} \sin \theta (1 - \cos \theta) J_2(k\rho \sin \theta) e^{ikz \cos \theta} d\theta. \quad (2.199)$$

Estas integrais devem ser avaliadas numericamente para cada ponto  $(\rho, z)$ . Note também que somente a função de Bessel de ordem zero tem valor não nulo na origem. No limite que  $f_0 \rightarrow \infty$ ,  $f_{\omega}(\theta) = 1$ , esta é a situação de uma abertura da objetiva sendo infinitamente preenchida (corresponde a uma onda incidente plana) e o resultado corresponde as soluções do Wolf (1959). No caso de  $f_0 \rightarrow 1$  corresponde ao caso de uma objetiva preenchida até a marca de  $1/e$  do campo elétrico. Valores menores que este representam um feixe gaussiano passando quase que totalmente

pela abertura, ou uma abertura infinita da lente. Para a pinça óptica utiliza-se um sobre preenchimento da objetiva, i.e.  $f_0 > 1$ .

## 2.3.5 Deslocamento Focal

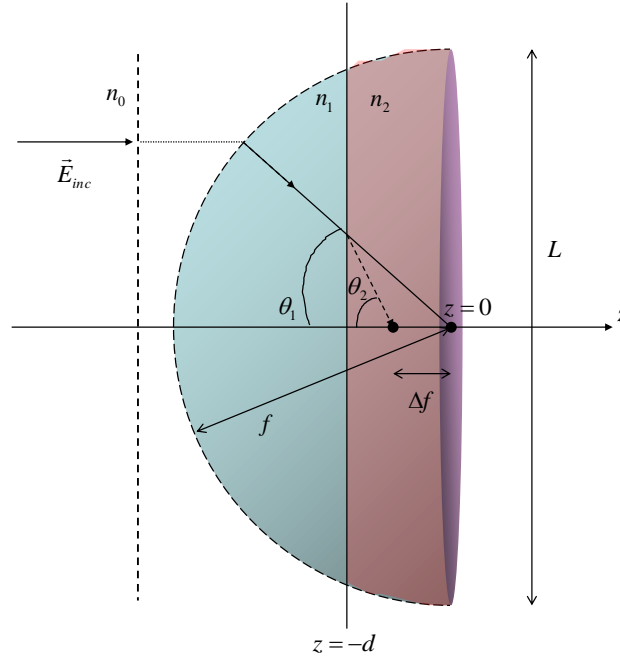
O líquido de imersão de muitas objetivas de microscópio possui o mesmo índice de refração da lamínula, que fica posicionada em cima de uma câmera, onde tem uma solução contendo as amostras a serem examinadas. Sendo que este é o nosso caso, o fato de termos essa interface plana lamínula/água que representa dois meios de diferentes índices de refração, causando uma profundidade aparente no nosso sistema, denominado de *focal shift* (Sheppard, 1997). Para levar este efeito em conta, o REA continua adequado já que a interface plana é uma superfície de coordenada constante (Visser, 1992; Novotny, 2006).

Quando uma onda esférica incide em uma interface dielétrica (Figura 2.12), a fase do campo transmitido é alterado. As condições são tais que os campos se somam construtivamente em um novo foco paraxial. Aplicando o princípio de Fermat e a lei de refração de Snell (Born, 1970), mostra-se que o deslocamento do foco ( $\Delta f$ ) pode ser escrito em termos da distância da interface  $d$  do foco não perturbado como,

$$\Delta f = d \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \sqrt{1 - \left( \frac{L}{2f} \right)^2 \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 - 1 \right]} \right), \quad (2.200)$$

onde  $L$  e  $f$  são o diâmetro e a distância focal da objetiva. Esta equação fornece uma descrição de óptica geométrica da dependência linear entre o deslocamento da posição do foco virtual  $d$ , com um deslocamento focal  $\Delta f$ . Distorções mais complexas introduzidas pela interface só podem ser reveladas através de um

tratamento completo da onda (Dogariu, 2000). Iremos fazer uso do REA para incorporar estes efeitos em nossa descrição dos campos EM.



**Figura 2.12 – Focalizando perto de uma interface**

Vamos então supor que a interface em  $(z = -d)$  separa dois meios dielétricos de índices  $n_1$  (vidro  $\approx 1,5$ ) e  $n_2$  (água  $\approx 1,3$ ), como na Figura 2.12. Logo a esquerda da interface temos o campo focal incidente  $\vec{E}_f$ . Enquanto as frequências espaciais  $k_x$  e  $k_y$  são as mesmas de cada lado da interface, isso não vale para  $k_z$ . Portanto  $k_z$  deve ser redefinido para os dois domínios como,

$$\begin{aligned} k_{z1} &= \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2} & \text{para } z \leq -d \\ k_{z2} &= \sqrt{k_2^2 - k_x^2 - k_y^2} & \text{para } z > -d \end{aligned} \quad (2.201)$$

onde  $k_i = (\omega/c)n_i$ .

A interface introduz novos campos elétricos refletidos e transmitidos. Portanto os campos resultantes são,

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_f + \vec{E}_r & \text{para } z \leq -d \\ \vec{E}_t & \text{para } z > -d \end{cases} \quad (2.202)$$

A lei de refração de Fresnel (Born, 1970) descreve a passagem dos campos através da interface dielétrica. Usamos os campos calculados no meio  $n_1$  como condição de contorno para obter uma solução vetorial do problema. Os campos são dados pela definição do REA (2.173),

$$\vec{E}_f = \frac{ik_1 f e^{-ik_1 f}}{2\pi} \iint_{k_x, k_y} \vec{E}_\infty(k_x, k_y) \frac{1}{k_{z1}} e^{i(k_x x + k_y y + k_{z1} z)} dk_x dk_y, \quad (2.203)$$

$$\vec{E}_r = \frac{if e^{-ik_1 f}}{2\pi} \iint_{k_x, k_y} \vec{E}_\infty^r(k_x, k_y) \frac{1}{k_{z1}} e^{i(k_x x + k_y y - k_{z1} z)} dk_x dk_y, \quad (2.204)$$

$$\vec{E}_t = \frac{if e^{-ik_2 f}}{2\pi} \iint_{k_x, k_y} \vec{E}_\infty^t(k_x, k_y) \frac{1}{k_{z2}} e^{i(k_x x + k_y y + k_{z2} z)} dk_x dk_y. \quad (2.205)$$

Notem que o campo  $\vec{E}_r$  propaga-se em sentido contrário e o campo  $\vec{E}_t$  está descrito no meio  $n_2$ . Como os coeficientes de Fresnel, dependem da polarização da onda, os campos terão que ser separados em componentes  $s$  e  $p$ . A decomposição do feixe incidente na interface segue de (2.177) e (2.181) projetando o campo  $\vec{E}_f$  ao longo dos vetores unitários  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\phi}$ .

Utilizando os campos acima e satisfazendo as condições de contorno na interface obtemos a solução para o campo transmitido como,

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}_\infty^{t(p)} \\ \vec{E}_\infty^{t(s)} \end{Bmatrix} = \frac{k_{z2}}{k_{z1}} e^{-id(k_{z1} - k_{z2})} e^{-i(k_1 - k_2)f} \begin{Bmatrix} t^p(\theta) \vec{E}_\infty^{(p)} \\ t^s(\theta) \vec{E}_\infty^{(s)} \end{Bmatrix}, \quad (2.206)$$

substituindo-se isso na equação (2.205) obtemos,

$$\vec{E}_t = \frac{if e^{-ik_1 f}}{2\pi} \iint_{k_x, k_y} \vec{E}_\infty^t(k_x, k_y) \frac{1}{k_{z1}} e^{-id(k_{z1} - k_{z2})} e^{i(k_x x + k_y y + k_{z2} z)} dk_x dk_y, \quad (2.207)$$



o próximo passo agora é converter para coordenadas esféricas como em (2.183).

$$\vec{E}_2(\rho, \varphi, z) = \frac{ik_1 f e^{-ik_1 f}}{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \int_0^{2\pi} e^{ik_2(z+d)\cos\theta_2} e^{-ik_1 d \cos\theta} \vec{E}_{\infty}(\theta, \phi) e^{ik\rho \sin\theta \cos(\phi-\varphi)} \sin\theta d\phi d\theta, \quad (2.208)$$

$$\vec{H}_2(\rho, \varphi, z) = \frac{ik_1 f e^{-ik_1 f}}{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \int_0^{2\pi} e^{ik_2(z+d)\cos\theta_2} e^{-ik_1 d \cos\theta} \vec{H}_{\infty}(\theta, \phi) e^{ik\rho \sin\theta \cos(\phi-\varphi)} \sin\theta d\phi d\theta. \quad (2.209)$$

Tomando em consideração os coeficientes de Fresnel, com o termo  $\cos\theta_2$  dado pela Lei de Snell (2.179) e o campo na esfera de referência dado por (2.181). Fazendo a mudança de variável de integração  $(\theta, \phi) \rightarrow (\alpha, \beta)$  das variáveis da objetiva, e supondo o campo elétrico incidente na polarização  $x$ , temos

$$\vec{E}_2(\rho, \varphi, z) = \frac{ik_1 f e^{-ik_1 f} E_0}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \int_0^{\alpha_{\max}} \int_0^{2\pi} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_a^2} e^{ik_2(z+d)\cos\alpha_2} e^{-ik_1 d \cos\alpha} e^{ik\rho \sin\alpha \cos(\beta-\varphi)} \left[ \begin{array}{l} (t^p \cos\alpha_2 + t^s) + (t^p \cos\alpha_2 - t^s) \cos 2\beta \\ (t^p \cos\alpha_2 - t^s) \sin 2\beta \\ - 2t^p \sin\alpha_2 \cos\beta \end{array} \right] d\alpha d\beta, \quad (2.210)$$

$$\vec{H}_2(\rho, \varphi, z) = \frac{ik_1 f e^{-ik_1 f} H_0}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \int_0^{\alpha_{\max}} \int_0^{2\pi} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_a^2} e^{ik_2(z+d)\cos\alpha_2} e^{-ik_1 d \cos\alpha} e^{ik\rho \sin\alpha \cos(\beta-\varphi)} \left[ \begin{array}{l} (t^s \cos\alpha_2 - t^p) \sin 2\beta \\ (t^s \cos\alpha_2 + t^p) - (t^s \cos\alpha_2 - t^p) \cos 2\beta \\ - 2t^s \sin\alpha_2 \sin\beta \end{array} \right] d\alpha d\beta. \quad (2.211)$$

Similar as expressões obtidas por Egner (1999).

## 2.4 Solução Exata

Na seção anterior vimos como determinar os campos EM na região focal, em termos de uma integral sob o ângulo de abertura da objetiva. Gouesbet e colaboradores sempre trabalharam com uma aproximação para o campo incidente, o feixe de Davis-Barton, chegando à uma expressão analítica final para os fatores de forma do feixe (Ren, 1998). Nesta seção vamos apresentar uma solução analítica para o campo na região focal, por este motivo, não há uma necessidade de descrever o feixe como sendo um feixe de Davis-Barton (Davis, 1979; Barton, 1989) e nem com o auxílio da Aproximação Integral Localizada (Gouesbet, 1999).

Primeiramente, vamos ter que fazer uma mudança no sistema de coordenadas, pois a expansão vetorial de ondas esféricas refere-se ao sistema de coordenada da esfera ( $e$ ) e não no do feixe incidente ( $f$ ).

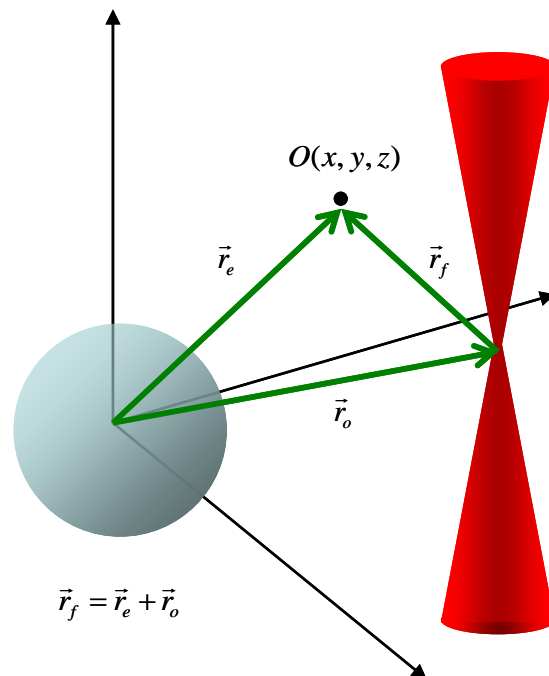


Figura 2.13 - Ilustração da mudança de sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned}
\rho \cos \phi &= r \sin \theta \cos \phi - \rho_0 \cos \phi_0 \\
\rho \sin \phi &= r \sin \theta \sin \phi - \rho_0 \sin \phi_0 . \\
z &= r \cos \theta - z_0
\end{aligned}
\tag{2.212}$$

Com isto podemos reescrever o campo elétrico na região focal do feixe (2.184) no sistema de coordenadas esféricas. De agora em diante vamos supor que o perfil do feixe na abertura da objetiva seja arbitário. Vamos também reescrever a variável de integração  $(\theta, \phi) \rightarrow (\alpha, \beta)$ , para poder distinguir as variáveis da objetiva com as do sistema de coordenadas esféricas, portanto os campos EM na região focal são

$$\begin{aligned}
\vec{E}(r, \theta, \phi) &= \frac{ikf e^{-ikf}}{2\pi} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sin \alpha e^{ik(r \cos \theta - z_0) \cos \alpha} \\
&\quad \int_0^{2\pi} d\beta \vec{E}_{\infty}(\alpha, \beta) e^{ikr \sin \alpha \sin \theta \cos(\phi - \beta)} e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} ,
\end{aligned}
\tag{2.213}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}(r, \theta, \phi) &= \frac{ikf e^{-ikf}}{2\pi} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sin \alpha e^{ik(r \cos \theta - z_0) \cos \alpha} \\
&\quad \int_0^{2\pi} d\beta \vec{H}_{\infty}(\alpha, \beta) e^{ikr \sin \alpha \sin \theta \cos(\phi - \beta)} e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} .
\end{aligned}
\tag{2.214}$$

Para determinar os coeficientes de forma do feixe precisamos do campo elétrico e magnético radial na região focal, como demonstrado nas equações (2.69) e (2.70), este é facilmente obtido das projeções cartesianas nas coordenadas esféricas. Notem que a natureza vetorial da equação acima vem do campo na esfera de referência, portanto,

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\infty}(\alpha, \beta) \cdot \hat{r} &= E_{r, \infty} = \vec{E}_{\infty} \cdot \hat{x}(\hat{x} \cdot \hat{r}) + \vec{E}_{\infty} \cdot \hat{y}(\hat{y} \cdot \hat{r}) + \vec{E}_{\infty} \cdot \hat{z}(\hat{z} \cdot \hat{r}) \\
&= E_{x, \infty} \sin \theta \cos \phi + E_{y, \infty} \sin \theta \sin \phi + E_{z, \infty} \cos \theta ,
\end{aligned}
\tag{2.215}$$

$$\vec{H}_{\infty}(\alpha, \beta) \cdot \hat{r} = H_{x, \infty} \sin \theta \cos \phi + H_{y, \infty} \sin \theta \sin \phi + H_{z, \infty} \cos \theta .
\tag{2.216}$$

Desta forma os termos a serem integrados (como foi feito na seção anterior), para obter as funções  $I_j(\rho, z)$  agora se misturam entre si. Substituindo-se os valores de (2.187) na equação acima obtemos,

$$E_{r,\infty}(\alpha, \beta) = \frac{E_{inc}(\alpha, \beta)}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \alpha} \left( [(1 + \cos \alpha) - (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta] \text{sen} \theta \cos \phi - (1 - \cos \alpha) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \text{sen} \phi - 2 \cos \beta \text{sen} \alpha \cos \theta \right), \quad (2.217)$$

$$H_{r,\infty}(\alpha, \beta) = \frac{H_{inc}(\alpha, \beta)}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1} \cos \alpha} \left( [(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta] \text{sen} \theta \text{sen} \phi - (1 - \cos \alpha) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \cos \phi - 2 \text{sen} \beta \text{sen} \alpha \cos \theta \right). \quad (2.218)$$

Podemos então escrever a expressão do campo elétrico e magnético radial na região focal explicitamente como,

$$E_r(r, \theta, \phi) = \frac{ikfe^{-ikf}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} E_0 \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \text{sen}^2 \alpha / \omega_a^2} e^{ik(r \cos \theta - z_0) \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \left\{ [(1 + \cos \alpha) - (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta] \text{sen} \theta \cos \phi - (1 - \cos \alpha) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \text{sen} \phi - 2 \cos \beta \text{sen} \alpha \cos \theta \right\}, \quad (2.219)$$

$$H_r(r, \theta, \phi) = \frac{ikfe^{-ikf}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} H_0 \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \text{sen}^2 \alpha / \omega_a^2} e^{ik(r \cos \theta - z_0) \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \left\{ [(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta] \text{sen} \theta \text{sen} \phi - (1 - \cos \alpha) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \cos \phi - 2 \text{sen} \beta \text{sen} \alpha \cos \theta \right\}. \quad (2.220)$$

Das equações (2.219) e (2.220) temos para um feixe gaussiano incidente polarizado na direção- $x$ , os campos elétricos radiais, e magnéticos,

$$\begin{aligned}
E_r(r, \theta, \phi) = & \frac{ikf e^{-ikf}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \int_0^{\alpha_{\max}} \int_0^{2\pi} E_{inc}(\alpha, \beta) e^{ik(r \cos \theta - z_0) \cos \alpha} e^{ikr \sin \alpha \sin \theta \cos(\phi - \beta)} \\
& e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} \\
& \left[ \{(1 + \cos \alpha) - (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta\} \sin \theta \cos \phi \right. \\
& \left. - (1 - \cos \alpha) \sin 2\beta \sin \theta \sin \phi - 2 \cos \beta \sin \alpha \cos \theta \right] d\beta d\alpha
\end{aligned} \quad , \quad (2.221)$$

$$\begin{aligned}
H_r(r, \theta, \phi) = & \frac{ikf e^{-ikf}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \int_0^{\alpha_{\max}} \int_0^{2\pi} H_{inc}(\theta, \phi) e^{ik(r \cos \theta - z_0) \cos \alpha} e^{ikr \sin \alpha \sin \theta \cos(\phi - \beta)} \\
& e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} \\
& \left[ \{(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta\} \sin \theta \sin \phi \right. \\
& \left. - (1 - \cos \alpha) \sin 2\beta \sin \theta \cos \phi - 2 \sin \beta \sin \alpha \cos \theta \right] d\beta d\alpha
\end{aligned} \quad . \quad (2.222)$$

Onde este campo incidente na abertura tem um perfil de amplitude arbitrária,  $E_{inc}(\theta, \phi)$ , dados por (2.189). A expansão de multipolos, dada pelas equações (2.69) e (2.70), que no caso de uma onda incidente vamos denotar os mutipolos elétricos por  $G_{nm}^{TM}$ , os magnéticos por  $G_{nm}^{TE}$  e a função radial por  $j_n(kr)$ ,

$$j_n(kr)G_{nm}^{TM} = \frac{-kr}{E_0 \sqrt{n(n+1)}} \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) E_r d\Omega, \quad (2.223)$$

$$j_n(kr)G_{nm}^{TE} = \frac{kr}{H_0 \sqrt{n(n+1)}} \int Y_{nm}^*(\theta, \phi) H_r d\Omega, \quad (2.224)$$

onde o hamônico esférico é dado por,

$$Y_{nm}^* = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{-im\phi}. \quad (2.225)$$

Vamos portanto calcular explicitamente as integrais sobre o ângulo sólido dos fatores de forma, deixando por último a integração sobre o ângulo da abertura e portanto da característica do feixe. Temos,

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TM} = & \frac{-kr}{E_0 j_n(kr) \sqrt{n(n+1)}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \\
 & \frac{ikf e^{-ikf}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \operatorname{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \operatorname{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
 & \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \\
 & \left[ \{(1 + \cos \alpha) - (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta\} \operatorname{sen} \theta \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} \cos \phi e^{ikr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} d\phi \right. \\
 & - (1 - \cos \alpha) \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} \theta \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} \operatorname{sen} \phi e^{ikr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} d\phi \\
 & \left. - 2 \cos \beta \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{ikr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} d\phi \right] , \quad (2.226)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TE} = & \frac{kr}{j_n(kr) H_0} \frac{ikf e^{-ikf}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!}} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \operatorname{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta H_{inc}(\theta, \phi) e^{-ik\rho_0 \operatorname{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
 & \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \\
 & \left[ \{(1 + \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha) \cos 2\beta\} \operatorname{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-im\phi} e^{ikr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} \operatorname{sen} \phi \right. \\
 & - (1 - \cos \alpha) \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-im\phi} e^{ikr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} \cos \phi \\
 & \left. - 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-im\phi} e^{ikr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} \right] . \quad (2.227)
 \end{aligned}$$

As integrais em  $\phi$ , são dadas pela equação (A.35), resultando em,

$$\begin{aligned}
G_{nm}^{TM} = & \frac{kr}{E_0 j_n(kr)} i^m \frac{ikf e^{-ikf}}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
& \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \, \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta \, E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
& \int_0^{\pi} d\theta \, \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \quad , \quad (2.228) \\
& \left[ i \cos \alpha \, \text{sen} \theta [J'_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta) + \text{sen} \alpha \cos \theta J_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta)] (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \right. \\
& \left. + i \text{sen} \theta m \frac{J_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta)}{kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{nm}^{TE} = & \frac{-kr}{H_0 j_n(kr)} i^m \frac{ikf e^{-ikf}}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
& \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \, \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta \, H_{inc}(\theta, \phi) e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
& \int_0^{\pi} d\theta \, \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \quad . \quad (2.229) \\
& \left[ \text{sen} \theta m \frac{J_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta)}{kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \right. \\
& \left. + [\cos \alpha \, \text{sen} \theta J'_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta) - i \text{sen} \alpha \cos \theta J_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta)] (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right]
\end{aligned}$$

Agora podemos identificar a integral no ângulo  $\theta$  como uma integral especial, reescrevendo os termos como,

$$\begin{aligned}
G_{nm}^{TM} = & \frac{1}{E_0 j_n(kr)} i^m \frac{ikf e^{-ikf}}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
& \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \, \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta \, E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
& \left[ i(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\pi} d\theta \, \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \right. \\
& \left. + i(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \frac{m}{\text{sen} \alpha} \int_0^{\pi} d\theta \, \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(kr \text{sen} \alpha \, \text{sen} \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \right] \quad , \quad (2.230)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TE} = & \frac{-1}{H_0 j_n(kr)} i^m \frac{ikf e^{-ikf}}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \operatorname{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta H_{inc}(\theta, \phi) e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \operatorname{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
 & \left[ \frac{m}{\operatorname{sen} \alpha} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(kr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \right. \\
 & \left. + (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(kr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \right]
 \end{aligned} \quad (2.231)$$

Note que com esta passagem temos que resolver somente uma integral dada por,

$$\int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ikr \cos \alpha \cos \theta} J_m(kr \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta) = 2i^{n-m} P_n^m(\cos \alpha) j_n(kr). \quad (2.232)$$

Esta integral até onde sabemos não estava tabelado e nem disponível. Esta é de fundamental importância, pois elimina completamente a dependência radial dos fatores de forma do feixe, que finalmente resultam em,

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TM} = & i^{n+1} \frac{ikf e^{-ikf}}{E_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \operatorname{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \operatorname{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)}, \\
 & \left[ (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \frac{d}{d\alpha} P_n^m(\cos \alpha) + \frac{m}{\operatorname{sen} \alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) P_n^m(\cos \alpha) \right]
 \end{aligned} \quad (2.233)$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TE} = & -i^n \frac{ikf e^{-ikf}}{H_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \operatorname{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta H_{inc}(\theta, \phi) e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \operatorname{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)}. \\
 & \left[ (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \frac{d}{d\alpha} P_n^m(\cos \alpha) + \frac{m}{\operatorname{sen} \alpha} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) P_n^m(\cos \alpha) \right]
 \end{aligned} \quad (2.234)$$

Esta expressão acima é geral para qualquer tipo de feixe na entrada da objetiva, fixemos até aqui as integrações das variáveis angulares da coordenada esférica e já conseguimos excluir a dependência radial do coeficiente. Já no caso do feixe de



Davis-Barton que o grupo do Gouesbet utiliza, eles não conseguem eliminar esta dependência e precisam utilizar feixes de ordem maior para reduzir esta dependência. Aqui nesta solução exata esta dependência radial foi eliminada completamente pela simetria do sistema de coordenadas.

No caso de um feixe centrado na abertura da objetiva de perfil gaussiano, ou seja axialmente simétrico, temos de (2.189),

$$\frac{E_{inc}(\alpha, \beta)}{E_0} = \frac{H_{inc}(\alpha, \beta)}{H_0} = e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2}, \quad (2.235)$$

utilizando isto e reescrevendo a derivada do polinômio associado de Legendre em termos da derivada do argumento temos,

$$G_{nm}^{TM} = 2i^{n+1} k f e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \\ \left[ i m P_n^m(\cos \alpha) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \sin \beta \right. \\ \left. - \sin^2 \alpha P_n^m(\cos \alpha) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-im\beta} e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \cos \beta \right] \quad , \quad (2.236)$$

$$G_{nm}^{TE} = -2i^n k f e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \\ \left[ m P_n^m(\cos \alpha) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} e^{-im\beta} \cos \beta \right. \\ \left. - i \sin^2 \alpha P_n^m(\cos \alpha) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} e^{-im\beta} \sin \beta \right] \quad , \quad (2.237)$$

podemos então resolver a integral em  $\beta$  que pode ser determinadas novamente por (A.35), e reorganizando através das identidades de Bessel (A.11) e (A.12) resultam em,

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TM} = & 4\pi i^{n-m} e^{-im\phi_0} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \\
 & \left[ \{m^2 P_n^m(\cos \alpha) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} - \sin^2 \alpha P_n'^m(\cos \alpha) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha)\} \cos \phi_0 \right. \\
 & \left. + im \{P_n^m(\cos \alpha) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha) - \sin^2 \alpha P_n'^m(\cos \alpha) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha}\} \sin \phi_0 \right] , \quad (2.238)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TE} = & -4\pi i^{n-m} e^{-im\phi_0} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-ikz_0 \cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \\
 & \left[ \{m^2 P_n^m(\cos \alpha) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} - \sin^2 \alpha P_n'^m(\cos \alpha) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha)\} \sin \phi_0 \right. \\
 & \left. - im \{P_n^m(\cos \alpha) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha) \cos \phi_0 - \sin^2 \alpha P_n'^m(\cos \alpha) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha}\} \cos \phi_0 \right] . \quad (2.239)
 \end{aligned}$$

Podemos escrever de maneira compacta as expressões acima, como sendo,

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TM} = & 4\pi i^{n-m} e^{-im\phi_0} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} , \\
 & [I_1(n, m) \cos \phi_0 + im I_2(n, m) \sin \phi_0] \quad (2.240)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TE} = & -4\pi i^{n-m} e^{-im\phi_0} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} , \\
 & [I_1(n, m) \sin \phi_0 - im I_2(n, m) \cos \phi_0] \quad (2.241)
 \end{aligned}$$

onde as integrais são dadas por,

$$\begin{aligned}
 I_1(n, m) = & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \\
 & \left( m^2 P_n^m(\cos \alpha) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} - \sin^2 \alpha P_n'^m(\cos \alpha) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha) \right) , \quad (2.242)
 \end{aligned}$$

$$I_2(n, m) = \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \left( P_n^m(\cos \alpha) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha) - \sin^2 \alpha P_n'^m(\cos \alpha) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} \right). \quad (2.243)$$

Desta simplificação podemos observar a simetria da dependência em  $m$ , notem que essas integrais herdam a propriedade de simetria dos polinômios de Legendre associado (A.29).

$$I_i(n, -m) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} I_i(n, m). \quad (2.244)$$

Desta forma só precisamos calcular a integral numericamente para valores de  $m$  positivo. Os coeficientes  $G_{nm}^{TE}$  e  $G_{nm}^{TM}$  são determinados portanto destas duas integrais. Sempre lembrando que  $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ,  $\phi_0 = \tan^{-1}(y_0/x_0)$ . Existem dois casos de simetria que vamos explorar mais adiante, o caso radial e o caso axial, do qual medimos a força.

## 2.4.1 Sistema com Deslocamento Focal

No caso de um sistema sob a condição de deslocamento focal devido a diferença de índice de refração na interface, procede-se de maneira similar, onde desta vez, utilizamos os campos dados pelas equações (2.210) e (2.211). Mudando para o sistema de coordenada da esfera, equação (2.212), temos a componente na direção radial dada por,

$$\begin{aligned}
 \hat{r} \cdot \vec{E}_2(r, \theta, \phi) = & \frac{ik_1 f e^{-ik_1 f}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha E_{inc}(\alpha, \beta) \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(r \cos \theta - z_0 + d) \cos \alpha_2} \\
 & e^{-ik_1 d \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\beta - \phi)} e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
 & \left[ \left( (t^p \cos \alpha_2 + t^s) + (t^p \cos \alpha_2 - t^s) \cos 2\beta \right) \text{sen} \theta \cos \phi \right. \\
 & \left. + (t^p \cos \alpha_2 - t^s) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \text{sen} \phi - 2t^p \text{sen} \alpha_2 \cos \beta \cos \theta \right]
 \end{aligned} \quad , \quad (2.245)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{r} \cdot \vec{H}_2(r, \theta, \phi) = & \frac{ik_1 f e^{-ik_1 f}}{4\pi} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha H_{inc}(\alpha, \beta) \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(r \cos \theta - z_0 + d) \cos \alpha_2} \\
 & e^{-ik_1 d \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\beta - \phi)} e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
 & \left[ \left( (t^s \cos \alpha_2 + t^p) - (t^s \cos \alpha_2 - t^p) \cos 2\beta \right) \text{sen} \theta \text{sen} \phi \right. \\
 & \left. + (t^s \cos \alpha_2 - t^p) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \cos \phi - 2t^s \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \beta \cos \theta \right]
 \end{aligned} \quad . \quad (2.246)$$

Da expansão de multipolos dada pelas equações (2.69) e (2.70), desta vez com  $k_2$  no lugar de  $k_1$  (que de agora em diante será escrito simplesmente como  $k$ ), obtemos,

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{TM} = & -\frac{k_2 r}{j_n(k_2 r)} \frac{ik f e^{-ik f}}{4\pi E_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(r \cos \theta - z_0 + d) \cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \\
 & \int_0^{2\pi} d\beta E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \int_0^{\pi} d\theta \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta \cos \alpha} \{ \\
 & \left[ (t^p \cos \alpha_2 + t^s) + (t^p \cos \alpha_2 - t^s) \cos 2\beta \right] \text{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} e^{-im\phi} \cos \phi \\
 & + (t^p \cos \alpha_2 - t^s) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} e^{-im\phi} \text{sen} \phi \\
 & - 2t^p \cos \beta \text{sen} \alpha_2 \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\phi - \beta)} e^{-im\phi} \}
 \end{aligned} \quad , \quad (2.247)$$

$$\begin{aligned}
G'_{nm}{}^{TE} = & \frac{k_2 r}{j_n(k_2 r)} \frac{ikf e^{-ikf}}{4\pi H_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
& \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \, \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta \, H_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} \\
& \int_0^{\pi} d\theta \, e^{ik_2 r \cos \theta \cos \alpha_2} \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) \\
& \left[ \left\{ (t^s \cos \alpha_2 + t^p) - (t^s \cos \alpha_2 - t^p) \cos 2\beta \right\} \text{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\phi \, e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\beta - \phi)} \text{sen} \phi e^{-im\phi} \right. \\
& + (t^s \cos \alpha_2 - t^p) \text{sen} 2\beta \text{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\phi \, e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\beta - \phi)} \cos \phi e^{-im\phi} \\
& \left. - 2t^s \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \beta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \, e^{ikr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos(\beta - \phi)} e^{-im\phi} \right]
\end{aligned} \quad (2.248)$$

Onde utilizamos a notação apóstrofe para o sistema com o deslocamento focal. As integrais em  $\phi$ , são dadas pela equação (A.35), resultando em,

$$\begin{aligned}
G'_{nm}{}^{TM} = & \frac{k_2 r}{j_n(k_2 r)} \frac{ikf e^{-ikf}}{2E_0} i^m \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
& \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \, \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta \, E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} e^{-im\beta} \\
& \int_0^{\pi} d\theta \, \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ik_2 r \cos \theta \cos \alpha_2} \\
& \{ it^p (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) [\text{sen} \theta \cos \alpha_2 J'_m(kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta) + \text{sen} \alpha_2 \cos \theta J_m(kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta)] \\
& + it^s (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) m \text{sen} \theta \frac{J_m(kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta)}{kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta} \}
\end{aligned} \quad (2.249)$$

$$\begin{aligned}
G'_{nm}{}^{TE} = & -\frac{k_2 r}{j_n(k_2 r)} \frac{ikf e^{-ikf}}{2H_0} i^m \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\
& \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \, \text{sen} \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta \, H_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \text{sen} \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} e^{-im\beta} \\
& \int_0^{\pi} d\theta \, \text{sen} \theta P_n^m(\cos \theta) e^{ik_2 r \cos \theta \cos \alpha_2} \\
& \{ t^s (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) [\text{sen} \theta \cos \alpha_2 J'_m(kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta) - i \text{sen} \alpha_2 \cos \theta J_m(kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta)] \\
& + t^p (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) m \text{sen} \theta \frac{J_m(kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta)}{kr \text{sen} \alpha \text{sen} \theta} \}
\end{aligned} \quad (2.250)$$

Podemos identificar a integral no ângulo  $\theta$  como uma derivada da integral especial, utilizando a lei de Snell,

$$k_2 \sin \alpha_2 = k \sin \alpha. \quad (2.251)$$

Assim,

$$\begin{aligned} G_{nm}^{TM} = & i \frac{1}{j_n(k_2 r)} \frac{ikf e^{-ikf}}{2E_0} i^m \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} e^{-im\beta} \\ & (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) t^p \frac{d}{d\alpha_2} \left[ \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(k_2 r \sin \alpha_2 \sin \theta) e^{ik_2 r \cos \theta \cos \alpha_2} \right] \\ & + (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) t^s \frac{m}{\sin \alpha_2} \left[ \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(k_2 r \sin \alpha_2 \sin \theta) e^{ik_2 r \cos \theta \cos \alpha_2} \right] \end{aligned} \quad (2.252)$$

$$\begin{aligned} G_{nm}^{TE} = & - \frac{1}{j_n(k_2 r)} \frac{ikf e^{-ikf}}{2H_0} i^m \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta H_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} e^{-im\beta} \\ & \{ (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) t^s \frac{d}{d\alpha_2} \left[ \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(k_2 r \sin \alpha_2 \sin \theta) e^{ik_2 r \cos \theta \cos \alpha_2} \right] \} \\ & + (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) t^p \frac{m}{\sin \alpha_2} \left[ \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_n^m(\cos \theta) J_m(k_2 r \sin \alpha_2 \sin \theta) e^{ik_2 r \cos \theta \cos \alpha_2} \right] \end{aligned} \quad (2.253)$$

escrevendo o argumento da função de Bessel em termos de  $k_2$ , obtemos a integral especial (2.232) em termos de  $k_2$ , ao invés de  $k$ , resultando em,

$$\begin{aligned} G_{nm}^{TM} = & \frac{ikf e^{-ikf}}{E_0} i^{n+1} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \int_0^{2\pi} d\beta E_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \sin \alpha \cos(\phi_0 - \beta)} e^{-im\beta} \quad (2.254) \\ & \left[ (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) t^p \frac{d}{d\alpha_2} P_n^m(\cos \alpha_2) + (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) t^s \frac{m}{\sin \alpha_2} P_n^m(\cos \alpha_2) \right] \end{aligned}$$

$$G_{nm}^{TE} = -\frac{ikfe^{-ikf}}{H_0} i^n \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sin\alpha \sqrt{\cos\alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos\alpha_2} e^{-ikd\cos\alpha} \int_0^{2\pi} d\beta H_{inc}(\alpha, \beta) e^{-ik\rho_0 \sin\alpha \cos(\phi_0-\beta)} e^{-im\beta} \cdot (2.255)$$

$$\left[ (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) t^s \frac{d}{d\alpha_2} P_n^m(\cos\alpha_2) + (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) t^p \frac{m}{\sin\alpha_2} P_n^m(\cos\alpha_2) \right]$$

Novamente esta expressão acima é geral para qualquer tipo de feixe na entrada da objetiva. Esta última integração nos permitiu livrarmos da dependência radial do coeficiente, inclusive para o caso de aberração. No caso de um feixe centrado na abertura da objetiva de perfil gaussiano, ou seja axialmente simétrico, vale (2.235) e, reescrevendo a derivada do polinômio associado de Legendre,

$$G_{nm}^{TM} = 2i^{n+1} ikfe^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{n_2}{n_1} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \sqrt{\cos\alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos\alpha_2} e^{-ikd\cos\alpha}$$

$$\left[ im t^s P_n^m(\cos\alpha_2) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-ik\rho_0 \sin\alpha \cos(\phi_0-\beta)} e^{-im\beta} \sin\beta \right. , \quad (2.256)$$

$$\left. - t^p \sin^2 \alpha_2 P_n^m(\cos\alpha_2) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-ik\rho_0 \sin\alpha \cos(\phi_0-\beta)} e^{-im\beta} \cos\beta \right]$$

$$G_{nm}^{TE} = -2i^n ikfe^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{n_2}{n_1} \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \sqrt{\cos\alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos\alpha_2} e^{-ikd\cos\alpha}$$

$$\left[ m t^p P_n^m(\cos\alpha_2) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-ik\rho_0 \sin\alpha \cos(\phi_0-\beta)} e^{-im\beta} \cos\beta \right. \cdot \quad (2.257)$$

$$\left. - i t^s \sin^2 \alpha_2 P_n^m(\cos\alpha_2) \int_0^{2\pi} d\beta e^{-ik\rho_0 \sin\alpha \cos(\phi_0-\beta)} e^{-im\beta} \sin\beta \right]$$

A integral em  $\beta$  é determinada por (A.35). Reorganizando através das identidades de Bessel (A.11) e (A.12) resulta em,

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{'TM} = & 4\pi ikf e^{-ikf} i^{n-m} e^{-im\phi_0} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \\
 & \left[ \{t^s m^2 P_n^m(\cos \alpha_2) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} - \sin^2 \alpha_2 t^p P_n^{'m}(\cos \alpha_2) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha)\} \cos \phi_0 \right. \\
 & \left. + i m \{t^s P_n^m(\cos \alpha_2) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha) - \sin^2 \alpha_2 t^p P_n^{'m}(\cos \alpha_2) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha}\} \sin \phi_0 \right]
 \end{aligned} \quad , (2.258)$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{'TE} = & -4\pi ikf e^{-ikf} i^{n-m} e^{-im\phi_0} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \\
 & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \\
 & \left[ \{t^p m^2 P_n^m(\cos \alpha_2) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} - \sin^2 \alpha_2 t^s P_n^{'m}(\cos \alpha_2) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha)\} \sin \phi_0 \right. \\
 & \left. - i m \{t^p P_n^m(\cos \alpha_2) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha) - \sin^2 \alpha_2 t^s P_n^{'m}(\cos \alpha_2) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha}\} \cos \phi_0 \right]
 \end{aligned} \quad . (2.259)$$

As expressões acima podem ser escritas de maneira compacta com a forma,

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{'TM} = & 4\pi i^{n-m} ikf e^{-ikf} e^{-im\phi_0} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} , \\
 & [I_1(n, m, t^s, t^p) \cos \phi_0 + im I_2(n, m, t^s, t^p) \sin \phi_0]
 \end{aligned} \quad (2.260)$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm}^{'TE} = & -4\pi i^{n-m} ikf e^{-ikf} e^{-im\phi_0} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} , \\
 & [I_1(n, m, t^p, t^s) \sin \phi_0 - im I_2(n, m, t^p, t^s) \cos \phi_0]
 \end{aligned} \quad (2.261)$$

onde as integrais são dadas por,

$$\begin{aligned}
 I_1(n, m, t^s, t^p) = & \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0)\cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \\
 & \left( t^s m^2 P_n^m(\cos \alpha_2) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} - \sin^2 \alpha_2 t^p P_n^{'m}(\cos \alpha_2) J_m'(k\rho_0 \sin \alpha) \right)
 \end{aligned} \quad , (2.262)$$



$$I_2(n, m, t^s, t^p) = \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} \sqrt{\cos \alpha} e^{ik_2(d-z_0) \cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \cdot (2.263)$$

$$\left( t^s P_n^m(\cos \alpha_2) J'_m(k\rho_0 \sin \alpha) - \sin^2 \alpha_2 t^p P_n^m(\cos \alpha_2) \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} \right)$$

Estas integrais são similares aquelas obtidas na seção anterior, (2.242) e (2.243), com exceção dos coeficientes de Fresnel e do ângulo  $\alpha_2$ . Possuem portanto a mesma simetria em  $m$ , ver equação (2.244).

## 2.4.2 Caso Axial

Para o caso axial, onde o foco do feixe propaga-se ao longo do eixo- $z$ , temos as seguintes simplificações:  $x_0 = y_0 = 0$ , desta forma o argumento da função de Bessel é nula em (2.240) e (2.241), tornando-se,

$$\lim_{k\rho_0 \rightarrow 0} \frac{J_m(k\rho_0 \sin \alpha)}{k\rho_0 \sin \alpha} = \frac{(k\rho_0 \sin \alpha)^{m-1}}{2^m m!} = \begin{cases} \pm 1/2 & \text{para } m = \pm 1 \\ 0 & \text{para } |m| \neq 1 \end{cases}, \quad (2.264)$$

$$\lim_{k\rho_0 \rightarrow 0} J'_m(k\rho_0 \sin \alpha) = \frac{m(k\rho_0 \sin \alpha)^{m-1}}{2^m m!} = \begin{cases} \pm 1/2 & \text{para } m = \pm 1 \\ 0 & \text{para } |m| \neq 1 \end{cases}. \quad (2.265)$$

Neste caso, somente os termos  $m = \pm 1$  (momento angular do spin do fóton) não são nulos, momento angular do spin do fóton, e os coeficientes de forma do feixe para o caso axial, tornam-se

$$G_{n,\pm 1}^{TM} = \mp i 2\pi i^n \frac{ikf e^{-ikf}}{n(n+1)} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} I(n), \quad (2.266)$$

$$G_{n,\pm 1}^{TE} = 2\pi i^n \frac{ikf e^{-ikf}}{n(n+1)} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} I(n), \quad (2.267)$$

onde,

$$I(n) = \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} e^{-ikz_0 \cos \alpha} \left( P_n^1(\cos \alpha) - \sin^2 \alpha P_n'^1(\cos \alpha) \right). \quad (2.268)$$

Os coeficientes de forma para o caso axial seriam dados por,

$$G_{n,\pm 1}^{TE} = \pm i G_{n,\pm 1}^{TM}. \quad (2.269)$$

Para o sistema onde há um deslocamento focal, a equação seria,

$$G_{n,\pm 1}'^{TM} = \mp i 2\pi i^n \frac{ikf e^{-ikf}}{(n+1)} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n}} I'(n), \quad (2.270)$$

$$G_{n,\pm 1}'^{TE} = 2\pi i^n \frac{ikf e^{-ikf}}{(n+1)} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n}} I'(n), \quad (2.271)$$

onde,

$$I'(n) = \int_0^{\alpha_{\max}} d\alpha \sqrt{\cos \alpha} e^{-f^2 \sin^2 \alpha / \omega_b^2} e^{ik_2(d-z_0) \cos \alpha_2} e^{-ikd \cos \alpha} \left( t^s P_n^1(\cos \alpha_2) - \sin^2 \alpha_2 t^p P_n'^1(\cos \alpha_2) \right). \quad (2.272)$$

Temos então os mesmos coeficientes de forma para o caso com o deslocamento,

$$G_{n,\pm 1}'^{TE} = \pm i G_{n,\pm 1}'^{TM}. \quad (2.273)$$

### 2.4.3 Caso Radial

Para o caso radial, onde o foco do feixe propaga-se no plano  $z = 0$ , temos a seguinte simplificação,  $z_0 = 0$ . As equações (2.240) e (2.241) para o caso sem o deslocamento focal e (2.260) e (2.261), permanecem as mesmas, onde nas integrais somente o termo da exponencial que contem  $z_0$  é nulo. Porém podemos simplificar considerando a propagação somente sobre o eixo  $x$  ( $\phi_0 = 0$  para  $x_0 > 0$  e  $\phi_0 = \pi$  para  $x_0 < 0$ ) ou  $y$  ( $\phi_0 = \pi/2$  para  $y_0 > 0$  e  $\phi_0 = -\pi/2$  para  $y_0 < 0$ ). No caso do feixe se propagar ao longo de  $x$  temos um movimento paralelo à polarização, e portanto

$$G_{nm}^{TM} = 4\pi i^{n-m} X^{m+1} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} I_1(n, m, z_0 = 0), \quad (2.274)$$

$$G_{nm}^{TE}(x_0) = im 4\pi i^{n-m} X^{m+1} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} I_2(n, m, z_0 = 0), \quad (2.275)$$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{para } x_0 > 0 \\ -1 & \text{para } x_0 < 0 \end{cases}. \quad (2.276)$$

Dedução semelhante segue para a translação ao longo do eixo  $y$ , que corresponde ao caso do movimento perpendicular à polarização,

$$G_{nm}^{TM}(y_0) = im 4\pi i^{n-m} Y^{m+1} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} I_2(n, m, z_0 = 0), \quad (2.277)$$

$$G_{nm}^{TE}(y_0) = -4\pi i^{n-m} Y^{m+1} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} I_1(n, m, z_0 = 0), \quad (2.278)$$

$$Y = \begin{cases} -i & \text{para } y_0 > 0 \\ i & \text{para } y_0 < 0 \end{cases}. \quad (2.279)$$

No caso especial de  $x_0 = 0$  ou  $y_0 = 0$ , vale a expressão do caso axial com  $z_0 = 0$ .

Para o sistema onde há um deslocamento focal, a equação seria,

$$G_{nm}^{TM}(x_0) = 4\pi i^{n-m} ikf e^{-ikf} X^{m+1} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} I_1(n, m, t^s, t^p, z_0 = 0), \quad (2.280)$$

$$G_{nm}^{TE}(x_0) = im4\pi i^{n-m} ikf e^{-ikf} X^{m+1} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} I_2(n, m, t^s, t^p, z_0 = 0), \quad (2.281)$$

$$G_{nm}^{TM}(y_0) = im4\pi i^{n-m} ikf e^{-ikf} Y^{m+1} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} I_2(n, m, t^s, t^p, z_0 = 0), \quad (2.282)$$

$$G_{nm}^{TE}(y_0) = -4\pi i^{n-m} ikf e^{-ikf} e^{-im\phi_0} \frac{\sqrt{n_2 n_0}}{n_1} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} I_1(n, m, t^s, t^p, z_0 = 0). \quad (2.283)$$

No próximo capítulo iremos descrever como o experimento foi realizado, e no seguinte comparar estes resultados teóricos com os experimentais, descrevendo as características de cada um.

## 2.5 Referências Bibliográficas

Ashkin, A. History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules. **IEEE J Sel Top Quant**, 6(6):841-856, 2000.

Ashkin, A.; Dziedzic, J.M. Optical levitation by radiation pressure. **Appl Phys Lett**, 19:283-285, 1971.

Ashkin, A.; Dziedzic, J.M.; Bjorkholm, J.E.; Chu, S. Observation of a Single-Beam Gradient Force Optical Trap for Dielectric Particles. **Opt Lett**, 11(5):288-290, 1986.

Barton, J.P.; Alexander, D.R. 5Th-Order Corrected Electromagnetic-Field Components for a Fundamental Gaussian-Beam. **J Appl Phys**, 66(7):2800-2802, 1989.

- Barton, J.P.; Alexander, D.R. Theoretical determination of net radiation force and torque for a spherical particle illuminated by a focused beam. **J Appl Phys**, 66(10):4594-4602, 1989a.
- Barton, J.P.; Alexander, D.R.; Schaub, S.A. Internal and near-surface electromagnetic fields for a spherical particle irradiated by a focused laser beam. **J Appl Phys**, 64(4):1632-1639, 1988.
- Born, M.; Wolf, E. Principles of Optics (Pergamon, UK, 1970).
- Davis, L. W. Theory of electromagnetic beams. **Phys Rev A**, 19:1177-1179, 1979.
- Debye, P. Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. **Ann Physik**, 30:57-136, 1909.
- Dogariu, A.C.; Rajagopalan, R. Optical Traps as Force Transducers: The effects of focusing the trapping beam through a dielectric interface. **Langmuir**, 16(6):2770-2778, 2000.
- Egner, A.; Hell, S.W. Equivalence of Huygens-Fresnel and Debye approach for the calculation of high aperture point-spread functions in the presence of refractive index mismatch. **J Microsc**, 193(3):244-249, 1999.
- Ganic, D.; Gan, X.S.; Gu, M. Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory. **Opt Express**, 12(12):2670-2675, 2004.
- Gordon, J.P. Radiation forces and momenta in dielectric media. **Phys Rev A**, 8(1):14-21, 1973.
- Gouesbet, G. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz-Mie theory for spheres. **J Opt Soc Am A**, 16(7):1641-1650, 1999.
- Gouesbet, G.; Maheu, B.; Grehan, G.. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using Bromwich formulation. **J Opt Soc Am A**, 5(9):1427-1443, 1988.
- Im, K.B.; Kim, H.I.; Joo, I.J.; Oh, C.H.; Song, S.H.; Kim, P.S.; Park, B.C. Optical trapping forces by a focused beam through two media with different refractive indices. **Opt Commun**, 226(1-6):25-31, 2003.
- Jackson, J.D. Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, Third Edition, 1999.
- Kerker, M. The Scattering of Light and other Electromagnetic Radiation. New York: Academic Press, 1969. 666p.
- Lilienfeld, P. A Blue Sky History. **Opt Pho News**, 6:32-39, 2004.
- Mandel, L.; Wolf, E. Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge University Press, New York, 1995.
- Mie, G. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. **Ann Physik**, 25:377-445, 1908.
- Neto, P.A.M.; Nussenzveig H.M. Theory of optical tweezers. **Europhys. Lett.**, 50(5):702-708, 2000.

Novotny, L.; Hecht, B. Principles of Nano-Optics, Cambridge University Press, New York, 2006.

Ren, K.F.; Gouesbet, G.; Grehan, G. Integral localized approximation in generalized Lorenz-Mie theory. **Appl Optics**, 37(19):4218-4225, 1998.

Ren, K.F.; Grehan, G.; Gouesbet, G. Radiation Pressure Forces Exerted on a Particle Arbitrarily Located in a Gaussian-Beam by Using the Generalized Lorenz-Mie Theory, and Associated Resonance Effects. **Opt Commun**, 108(4-6):343-354, 1994.

Ren, K.F.; Grehan, G.; Gouesbet, G. Symmetry relations in generalized Lorenz-Mie theory. **J Opt Soc Am A**, 11(6):1812-1817, 1994a.

Richards, B.; Wolf, E. Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. 2. Structure of the Image Field in an Aplanatic System. **Proc R Soc Lon Ser-A**, 253(1274):258-279, 1959.

Sheppard, C.J.R.; Török, P. Effects of specimen refractive index on confocal imaging. **J of Micros.** 185(3):366-374, 1997.

Siegman, A.E. Lasers (University Science Books, Mill Valley, Calif., 1986)

Svoboda, K.; Block, S.M. Biological applications of optical forces. **Annu Rev Biophys Biomol Struct**, 23:247-285, 1994.

Török, P.; Varga, P.; Laczik, Z.; Booker, G.R. Electromagnetic diffraction of light focused through a planar interface between materials of mismatched refractive indices: an integral representation. **J Opt Soc Am A**, 12(2):325-332, 1995.

Visser, T.D.; Wiersma, S.H. Diffraction of converging electromagnetic waves. **J Opt Soc Am A**, 9(11):2034-2047, 1992.

Weyl, H. 'Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter. **Ann. Phys. (Leipzig)**, 60:481-500, 1919.

Wolf, E. Electromagnetic Diffraction in Optical Systems. 1. An Integral Representation of the Image Field. **Proc R Soc Lon Ser-A**, 253(1274):349-357, 1959.

# Capítulo 3

## Método Experimental

*"Allez en avant et la fois fous viendra"  
Just do it now, and prove it later*

*D'Alembert*

Neste capítulo abordaremos os materiais e métodos utilizados para a medição da força óptica em microesferas. Primeiramente na seção 3.1 iremos apresentar os principais componentes de uma pinça óptica e suas funções. Já na seção seguinte 3.2 apresentaremos a montagem experimental tal que esta possa ser reproduzida adequadamente e os cuidados nos preparos das amostras utilizadas. Finalizamos este capítulo detalhando como as medidas foram realizadas para em seguida apresentar os resultados.

## 3.1 Arquitetura da Pinça Óptica

Para construir uma pinça óptica com opção de manipular e medir forças, duas arquiteturas são necessárias. Para manipular objetos aprisionados o feixe de aprisionamento deve poder ser varrido nas três dimensões radiais e na direção axial. Para medidas de força, a armadilha é aproximada por um poço harmônico, cuja força pode ser determinada por meio da lei de Hooke. Isto requer um método para medir os deslocamentos do objeto aprisionado relativo ao centro da armadilha durante a interação. Para isso podemos utilizar o auxílio de uma outra armadilha óptica atuando como uma força perturbadora.

Em várias situações experimentais, deseja-se medir a força na dimensão radial ou na dimensão axial. A força de aprisionamento radial é muitas vezes maior do que a força axial e mais conveniente para muitas aplicações. Porém, aplicações interessantes no movimento axial incluem a varredura topográfica de uma membrana de um material mole demais para ser feito com procedimento padrão utilizando microscopia de força atômica (Frieze, 1999).

A arquitetura de um sistema de pinça óptica pode ser dividida em quatro elementos importantes: (1) o laser, (2) a região de aprisionamento, que consiste na objetiva do microscópio, câmera da amostra e estágio, (3) a óptica que introduz o laser na armadilha, que pode incluir mecanismos para mover radialmente e/ou axialmente o feixe, e (4) o sistema de detecção para medir os objetos aprisionados e seus movimentos.

### 3.1.1 Laser

As principais considerações que devem ser feitas para a escolha do laser para operação em pinça óptica dizem respeito à potência, comprimento de onda e modo.



O aprisionamento foi conduzido com sucesso utilizando vários comprimentos de onda desde o visível até infravermelho próximo e com potências de alguns miliwatts até centenas de miliwatts. Como a dureza da armadilha aumenta com a potência, a intensidade deve ser escolhida de acordo com a aplicação desejada. Medidas de força em escalas de pico-Newtons requerem uma armadilha mais fraca, já o aprisionamento de um espermatozóide requer muito mais potência.

Com aplicações biológicas a principal preocupação é com o dano óptico à amostra. Isto pode resultar por aquecimento direto, ionização ou outros mecanismos (Berns, 1998; Wright, 1994). A escolha apropriada do comprimento de onda pode minimizar o dano. A maioria das amostras são suspensas em soluções aquosas sendo o coeficiente de absorção da água baixo no visível, mas aumenta drasticamente para comprimentos de onda no infravermelho. Por outro lado, o coeficiente de absorção de alguns materiais biológicos comuns, como a deoxyhemoglobina ( $\text{HbO}_2$ ) e a oxyhemoglobina (Hb) é alto na região do visível e decresce com o comprimento de onda, caindo na região do infravermelho. A região em torno de 1000nm oferece um mínimo para a absorção combinada, e é portanto ideal para o aprisionamento de espécimes biológicos. Uma escolha freqüente para esta utilização é a do laser de 1064nm de um Nd:YAG (Model 3800S, Spectra-Physics). Nesta pesquisa utilizou-se também o laser de Ti:Safira (Model 3900S e Tsunami, Spectra-Physics) operando em torno de 785nm bombeado pelo laser de Argônio (Coherent, Innova 400).

A potência máxima de saída do laser de Ti:Safira CW (Model 3900S) é de 800mW em 785nm para um bombeio de 10W do laser de Argônio, já o Ti:Safira pulsado (Tsunami) é de 600mW em 810nm com um bombeio de 11.5W do Argônio. Este laser tem pulsos da ordem de 100fs e uma taxa de repetição de 80MHz. O laser de Nd:YAG opera em 1064nm com uma potência de saída perto de 15W.

### 3.1.2 Região de Aprisionamento

Para a região de aprisionamento, as escolhas são simples. Para produzir uma força de gradiente na direção axial forte o suficiente para ultrapassar a força espalhadora, uma lente de alta abertura numérica (NA) é necessária (Ashkin, 1986; Wright, 1994; Svoboda, 1994). O que equivale a uma objetiva de microscópio de alta qualidade com N.A. maior que 1.0 e magnificação da ordem de 100 vezes (Svoboda, 1994) (Smith, 1999). Neste trabalho utilizamos a objetiva de imersão a óleo SPlan PL100 de abertura numérica de 1,25 da Olympus. Esta tem uma distância de trabalho de 160µm. As objetivas são projetadas tipicamente para uso com luz visível, tal que as películas anti-refletivas não estão otimizadas para os comprimentos de onda do infravermelho utilizado na maioria dos aprisionamentos. Transmissões nestes comprimentos de onda são relativamente baixos, na faixa de 40-60% (Svoboda, 1994). Tais medidas de transmissão são difíceis de se obter com um fotodetector para objetivas de alta abertura numérica devido às reflexões internas totais devido ao feixe altamente divergente que surge da objetiva. Este problema pode ser resolvido utilizando duas objetivas idênticas num arranjo confocal com uma gota de óleo de imersão entre elas. A transmissão total deste sistema é o produto dos coeficientes individuais de transmissão. A maioria dos microscópios tradicionais incluem um estágio de translação x-y-z (como o eixo-z sendo o da objetiva). Estes estágios são motorizados para deslocamentos precisos de submicron.

A região onde fica pinçada a micro-esfera é uma câmera de Neubauer. Esta consiste em uma lâmina com um desnível de 100 µm, a parte mais alta do desnível sustenta a lamínula, mantendo desta forma o líquido (geralmente água) recluso em seu interior. Já no desnível mais baixo (no interior da câmera) ha um padrão de quadriculados de 50x50 µm que serve para calibração. Sobre esta lamínula (de 170 µm de espessura) é depositado um óleo de imersão, para fazer o casamento dos meios lente/óleo/lamínula evitando desta forma altas perdas por reflexão, já que os raios incidem na interface com um alto angulo. Sob este óleo aproxima-se a lente objetiva, até que o fundo da câmera de Neubauer seja visualizada.

### 3.1.3 Movimentação do Feixe

O terceiro elemento que entrega o feixe laser à região de aprisionamento envolve mais escolhas. A primeira delas é que esta óptica deve conduzir o feixe laser na abertura da objetiva com um diâmetro e divergência apropriados, para otimizar o aprisionamento. Para um aprisionamento eficiente, a transmissão através da objetiva deve ser relativamente alta, assim a abertura deve ser completamente preenchida ou levemente sobre-preenchida. Preencher a abertura é desejável, pois isso produz uma cintura do feixe, limitada por difração, no foco da armadilha, desta forma os feixes da região mais externa da lente contribuem mais para a força de gradiente axial, enquanto aqueles perto do eixo do feixe contribuem mais para a força espalhadora. Um compromisso entre a eficiência de transmissão e eficiência de aprisionamento de um feixe gaussiano é o de expandir o feixe tal que 85% da potência do feixe seja transmitida através da abertura da objetiva. Isto corresponde aproximadamente ao diâmetro  $1/e^2$  do feixe (Wright, 1994; Simmons, 1996; Svoboda, 1994). A divergência apropriada para este feixe irá depender do modelo da objetiva. Num microscópio simples a objetiva é colocada logo após o plano focal da lente objetiva. A imagem produzida pela objetiva está no/perto do plano focal da ocular, que leva a uma imagem virtual com um grande aumento angular. A distância entre o plano focal da objetiva e o plano da ocular é conhecida como *tube length* do microscópio (180mm).

É desejável, para a maioria das aplicações de aprisionamento, manipular os objetos pelo movimento da armadilha dentro da câmera de amostra. A óptica para guiar o feixe consiste, portanto, de elementos importantes para o sistema óptico. O objetivo de qualquer sistema de guiamento é de mover a cintura do feixe de aprisionamento no plano focal da objetiva, pela mudança do ângulo do feixe na entrada da abertura da objetiva. O desafio está em manter esta abertura preenchida e a divergência do feixe constante, enquanto o ângulo é alterado. Para mover a armadilha na direção  $z$  também é vantajoso ter a possibilidade de ajustar a divergência do feixe em uma faixa estreita. Alguns dos métodos em uso, para guiar o

feixe da pinça, aproximam o requerimento acima até primeira ordem. Uma única lente que focaliza o feixe de aprisionamento em um plano conjugado ao foco da armadilha pode ser transladado levemente no plano x-y providenciando assim um direcionamento do feixe no plano x-y. Translação ao longo do eixo do feixe, também irá mover a armadilha na direção z pela mudança da divergência do feixe. Similarmente se uma fibra óptica está acoplada a um laser, a ponta de saída pode ser transladada relativo às lentes colimadoras para mover o feixe nas direções x, y e z. (Frieze, 1996; Svoboda, 1994). Qualquer um destes sistemas pode ser motorizado por um controle, automatizando desta maneira o guiamento do feixe.

Sistemas mais elaborados provêm uma melhor aproximação para o orientamento do feixe. Alguns projetos utilizam um par de espelhos, um para a deflexão em  $x$  e outro para a deflexão em  $y$ , localizados entre a cintura do feixe e da lente que faz a cintura conjugada ao da objetiva. Mudando o ângulo destes espelhos muda-se a localização aparente da cintura do feixe incidente no plano focal, o que produz um movimento correspondente no plano de aprisionamento (Simmons, 1996; Ishijima, 1998). Este projeto também já foi utilizado em conjunção com moduladores acusto-óptico (Visscher, 1999) que podem produzir translações muito rápidas úteis para aplicações específicas. Um modulador acusto-óptico introduz uma perda significativa na potência e qualidade do feixe, por isso seu uso é adequado somente quando a velocidade for indispensável. Um projeto do sistema óptico que atinge uma aproximação melhor do que primeira ordem para o movimento do feixe foi introduzido por Fallman e Axner (1997), este foi o sistema utilizado por nós e será descrito detalhadamente na seção 3.2.

### 3.1.4 Sistema de Detecção

Para iluminar a região de aprisionamento para visualização, foi utilizada a lâmpada incandescente original do microscópio (Olympus, BH2-MA-2). Para as medidas de

espalhamento e determinação da posição um feixe de 10mW He-Ne (Uniphase) foi utilizado para iluminar a partícula. A porção do feixe que passa pelo espelho dicróico (retroespalhada) é parcialmente desviada para a fotomultiplicadora (Hamamatsu R282) e a outra para a câmera CCD (Samsung, SDC-312), a parte refletida pelo espelho dicróico (Filtro de Densidade Neutra) é dirigida a um monocromador para as medidas espectrais. Uma lente de um aumento de 2.5X é utilizado para magnificar a imagem sobre a câmera de vídeo, com um zoom final de 250X. Para poder detectar o laser de Nd:YAG (1064nm) o filtro de IR original da CCD foi removido. Filtros de cores são utilizados para evitar a saturação proveniente do laser de Ti:Safira e Nd:YAG. A potência do feixe de laser é medida utilizando-se o medidor de potência Fieldmaster (Coherent), para medir a potência após a objetiva foi utilizado o Nova (Ophir) e o comprimento de onda através de um espectrômetro Spectra-Pro. O controle dos dispositivos e a aquisição dos dados é feita através da interface padrão IEEE-488 GPIB pelo uso do software Labview (National Instruments).

A luz retroespalhada pelo laser HeNe na microesfera é coletada através da mesma objetiva, que introduz o laser de aprisionamento, e é detectada pela fotomultiplicadora (PMT) posicionada na abertura da ocular do microscópio. A intensidade registrada pela PMT é sincronizada com a modulação do feixe perturbador através de um modulador óptico. Este sinal é enviado ao lockin para monitoramento do sinal e sua aquisição. Para entender melhor como esta modulação de intensidade corresponde ao deslocamento da micro-esfera, descrevemos a equação de movimento do nosso sistema.

A armadilha pode ser modelada como um potencial harmônico tridimensional. O movimento da partícula é amortecido pela viscosidade do meio e por colisões com as moléculas que compõem o meio. A equação diferencial para modelar o movimento da partícula em uma dimensão é então,

$$m\ddot{x} = -D\dot{x} - kx - f(t), \quad (3.1)$$

onde  $D$  é o coeficiente de arraste,  $k$  é a constante da mola,  $f(t)$  é a força perturbadora e periódica. Para uma esfera movimentando-se perpendicularmente a um plano fixo o arraste de Stokes é alterado para incluir os efeitos da interface

através de um parâmetro  $h/a$ , onde  $h$  é esta distância do centro da partícula até o plano da interface e  $a$  é o raio da partícula. Em todos os experimentos a partícula foi aprisionada à meia profundidade ( $50\mu\text{m}$  da interface) para minimizar estes efeitos. Nos regimes de escoamento para baixos números de Reynolds, sem energia cinética, estamos sempre em uma condição de equilíbrio, pois as forças de arraste dominam o movimento da partícula aprisionada (Purcell, 1977). Desta forma a velocidade terminal da partícula é alcançada em tempos da ordem de um milissegundo (para  $Re \approx 10^{-4}$ ), e podemos considerar que o movimento se mantém nesta velocidade o tempo todo. Logo podemos aproximar,

$$\begin{aligned} D\dot{x} &= f(t) = F \cos(\omega t) \\ \therefore x(t) &= x_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

e portanto a força  $F \propto x_0$ .

A intensidade detectada depende da função da posição da partícula, como estamos na região de  $\Delta x = x_0$ , muito pequena, podemos considerar a intensidade detectada como sendo linearmente proporcional ao deslocamento.

$$I(x) = \frac{dI}{dx} \Delta x. \quad (3.3)$$

Conseqüentemente a força é proporcional à intensidade do sinal detectado.

## 3.2 Montagem Experimental

A Figura 3.1 ilustra a montagem experimental utilizada para medir a força e excitar os modos de MDR nas microesferas de poliestireno. Os caminhos do feixe de aprisionamento, o de perturbação e o de detecção passam todos pelo microscópio reto.

O sistema de controle do feixe adotado utiliza um par de lentes e um espelho *gimbal mount* para prover o guiamento na direção radial com excelente resultado no requerimento de manter a posição do feixe e do diâmetro constantes, na abertura da objetiva enquanto o ângulo e a divergência para o guiamento do feixe na posição axial são ajustados. Para o guiamento do feixe axial, o estágio de translação (UT100-50-1um) foi utilizado para a primeira lente, com o controlador de estágio (ITL09, Micro Controle). Para o guiamento do feixe radial, o estágio de translação (UT50-20-0,1um) foi utilizado no *gimbal mount*, controlado pelo mesmo controlador.

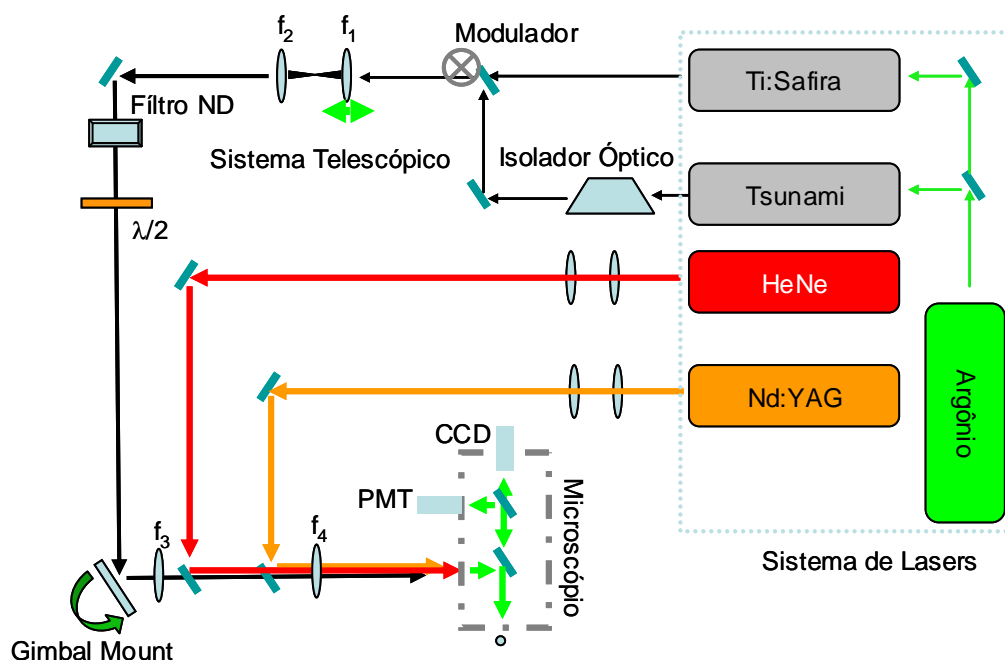


Figura 3.1 - Montagem do sistema de pinça óptica

Lente	Foco (mm)	Distancia*(mm)
$f_1$	38,1	88
$f_2$	50,2	343
$f_3$	400	700
$f_4$	300	360
obj	1,7	-

Tabela 3.1 – Dados das lentes utilizadas na montagem. \* Distância em relação à lente seguinte.

### 3.2.1 Escolha dos Componentes Ópticos

A montagem final da pinça óptica está ilustrada na Figura 3.1. Os sistemas que descreveremos em detalhe na próxima seção são os de controle axial (telescópio com lentes  $f_1$  e  $f_2$ ), e controle radial (*gimbal mount*, lentes  $f_3$  e  $f_4$ ). A escolha destas lentes e posição, é feita a partir de restrições do problema e restrições externas. A restrição do problema no caso do controle axial é de poder varrer com o foco toda a extensão da câmera utilizando quase toda a extensão da translação do estágio motorizado, conseguindo desta forma uma boa resolução axial. Já a restrição do problema radial é a de obter uma boa resolução espacial pivoteando o feixe na entrada da abertura da objetiva, evitando desta forma perder potência do feixe. Outra restrição importante é que o sistema de controle axial e radial não interfiram um com o outro, sendo que a posição, e a lente  $f_4$  não podem ser removidas pois pertencem a pinça do Nd:YAG, já montado. As restrições externas são a disponibilidade das lentes ( $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ ) e o espaço disponível para a montagem.

Para resolver este problema optamos pelo método matricial conhecido como ABCD (Saleh, 1991), que é uma técnica paraxial de traçado de raios que vamos utilizar para estimar a posição e lentes a serem utilizadas. A posição e ângulo dos raios são descritos em relação ao eixo óptico. A posição e ângulo do feixe, após sua passagem pelo sistema óptico está relacionado por uma matriz  $2 \times 2$ , denominada de matriz de transferência.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

que pode ser escrita também por derivadas,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial x_1}{\partial \theta_0} \theta_0 \\ \theta_1 &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_0} \theta_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$



Os coeficientes  $A$  e  $D$  são as magnificações espacial e angular respectivamente. As matrizes utilizadas para cada componente do sistema óptico de guiamento são  $T$  (deslocamento) e  $L$  (lente):

$$T(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

onde  $d$  é a distância entre os elementos ópticos e  $f$  é a distância focal das lentes ( $f$  é positivo para lentes convergentes). O produto das matrizes dos elementos ópticos de todo o sistema resulta em uma matriz tipo a (3.4). Condições especiais ocorrem quando um elemento desta matriz for nulo. Caso  $A$  seja nulo, esta matriz corresponde ao sistema de focalização, onde feixes entrando paralelos saem focalizados todos em um mesmo ponto (segundo plano focal). Caso  $B$  seja nulo, a matriz corresponde a um sistema de imagem onde todos os feixes incidentes vindo de um ponto do plano objeto são focalizados em um ponto no plano imagem, planos conjugados de magnificação espacial  $A$ . Caso  $C$  seja nulo, o sistema óptico é afocal e apenas desvia o feixe pois todos os feixes incidentes paralelos são desviados também paralelos, como em um sistema telescópico de magnificação angular  $D$ . Já se  $D$  for nulo, isto corresponde a um sistema de defocalização, onde os feixes que saem da imagem em um ponto (primeiro plano focal), atravessam o sistema óptico, e saem paralelos.

### 3.2.2 Controle Radial

Para o sistema óptico de controle radial, foi adotado o sistema afocal, composto por uma objetiva, duas lentes e o espelho no *gimbal mount*. Um *gimbal mount* é uma montagem que permite uma rotação entorno do eixo perpendicular que está no plano do espelho. Montagens ópticas típicas rotacionam os espelhos em torno de um eixo

que talvez não esteja no plano do espelho. No caso da montagem do espelho típico o resultado é que o feixe atinge diferentes pontos na superfície do espelho a medida que o espelho é inclinado. Com uma montagem *gimbal* o spot do feixe está sempre no mesmo ponto do centro na face do espelho. Satisfazendo certas condições, uma rotação no centro do espelho pelo *gimbal mount* permite rotacionar o feixe entorno da entrada da objetiva sem mudar o seu tamanho ou posição do feixe (desta forma mantendo a intensidade constante), como ilustrado na Figura 3.2.

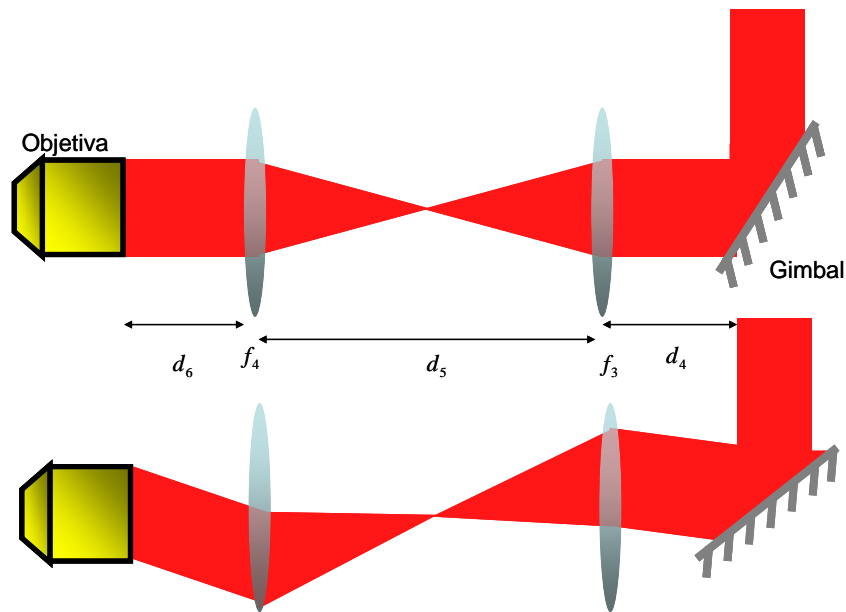


Figura 3.2 - Sistema de controle radial da posição da pinça óptica

A matriz de transferência deste sistema é,

$$M_r = T(d_6).L(f_4).T(d_5).L(f_3).T(d_4), \quad (3.7)$$

e o elemento  $C$  desta matriz de transferência é,

$$C_r = -\frac{f_3 + f_4 - d_5}{f_3 + f_4}, \quad (3.8)$$

e é nulo (afocal) quando,

$$d_5 = f_3 + f_4, \quad (3.9)$$

logo,

$$M_r = \begin{pmatrix} -\frac{f_4}{f_3} & f_3 + f_4 - \frac{d_6 f_3}{f_4} - \frac{d_4 f_4}{f_3} \\ 0 & -\frac{f_3}{f_4} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Isto fornece uma magnificação angular de  $-f_3/f_4$ , na entrada da objetiva. Portanto para um deslocamento angular de  $\Delta\theta$  no espelho do *gimbal mount*, o deslocamento radial é da ordem de,

$$\Delta r = f_{obj} \frac{f_3}{f_4} \Delta\theta. \quad (3.11)$$

De acordo com as nossas restrições (ou condições de contorno) a  $f_{obj}$ ,  $f_4$  e  $d_6$ , não podem ser alterados, queremos que a distância  $d_5$  seja grande o suficiente para não estar entre a entrada do microscópio e a entrada do espectrômetro, para não ter que incluir uma lente no meio do caminho onde são realizados os espectros. Uma vez localizada a posição aproximada de lente  $f_3$ , a sua distância focal é determinada pela restrição (3.9).

Queremos ainda que os planos na superfície do *gimbal mount* e na entrada da objetiva sejam planos conjugados, portanto o termo  $B$  desta matriz de transferência deve ser nulo,

$$\begin{aligned} B_r &= f_3 + f_4 - \frac{d_6 f_3}{f_4} - \frac{d_4 f_4}{f_3} = 0 \\ \therefore d_4 &= \frac{f_3}{f_4} \left[ f_3 + f_4 - d_6 \frac{f_3}{f_4} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Obtemos então a posição exata de onde deve ficar o centro do espelho no *gimbal mount*. A rotação do gimbal mount é controlada por um estágio de translação com resolução de  $0.1\mu\text{m}$ , o ponto de apoio em relação ao centro do espelho é de aproximadamente  $1,25\text{cm}$ , logo isto fornece um ângulo de  $8 \times 10^{-6}$  rad. De acordo

com a óptica utilizada na montagem, Tabela 3.1, isto resulta em um controle espacial de aproximadamente  $0,2\mu\text{m}$  para cada passo do motor do estágio de translação.

### 3.2.3 Controle Axial

Para o sistema óptico de controle axial, foi adotado o sistema telescópico, composto por duas lentes, de acordo com a Figura 3.3. Neste caso o controle é feito pela divergência do feixe, mas o tamanho do feixe na entrada da objetiva (ou no espelho do *gimbal mount*, plano conjugado) deve permanecer o mesmo.

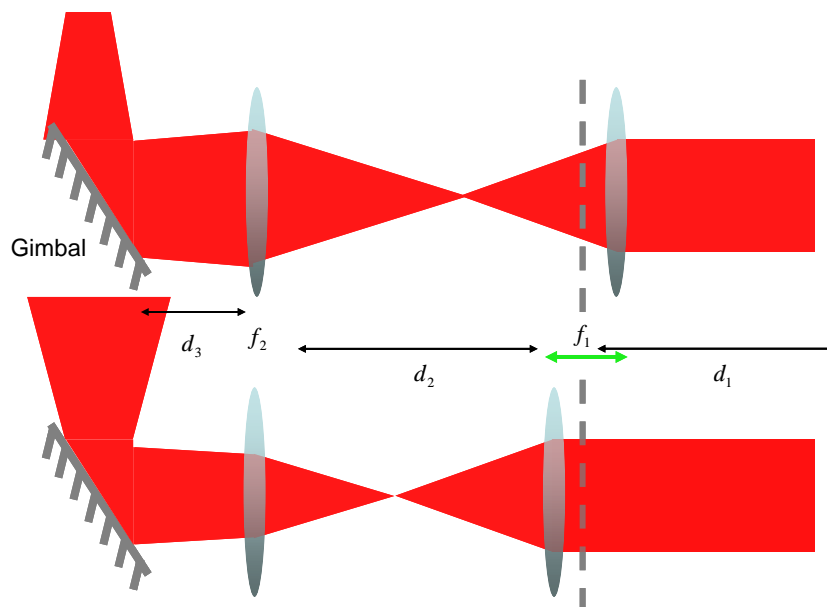


Figura 3.3 - Sistema de controle axial da posição da pinça óptica

A matriz de transferência deste sistema é,

$$M_z = T(d_3).L(f_2).T(d_2).L(f_1).T(d_1). \quad (3.13)$$

Desejamos então que o tamanho do feixe sobre o *gimbal mount* não mude à medida que movemos a lente  $f_1$  a uma distância  $d_2$  de  $f_2$ . A magnificação espacial é o elemento  $A$  da matriz de transferência,

$$A_z = \frac{d_2(d_3 - f_2) + f_1 f_2 - d_3(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2}, \quad (3.14)$$

e quando,

$$d_3 = f_2. \quad (3.15)$$

O coeficiente  $A$  da matriz de transferência independe da distância  $d_2$  entre  $f_1$  e  $f_2$ . Portanto neste caso podemos controlar a divergência (posição axial) do feixe simplesmente deslocando a lente  $f_1$ , quando a lente  $f_2$  estiver a uma distância  $d_3$  do *gimbal mount*. A distância  $d_2$  é inicialmente  $f_1 + f_2$  tornando-se então um outro sistema afocal.

A posição em  $z$  do foco desloca-se de acordo com a posição  $x$  da lente  $f_1$  aproximadamente por,

$$\Delta z = \left( \frac{f_{obj} f_3}{f_4 f_2} \right)^2 \Delta x. \quad (3.16)$$

Como o estágio de translação da lente  $f_1$  desloca-se de  $1\mu\text{m}$  para cada passo, isto resulta (de acordo com a óptica utilizada na montagem, Tabela 3.1), em um controle axial de aproximadamente  $1,3\text{nm}$  para cada passo do motor do estágio de translação.

### 3.2.4 Amostras e Preparação

As amostras utilizadas nestes experimentos consistem em uma suspensão de microesferas de poliestireno, com diâmetros de 3  $\mu\text{m}$ , 6  $\mu\text{m}$ , e 9  $\mu\text{m}$ ; e de vidro com diâmetro de 4  $\mu\text{m}$ . As microesferas foram obtidas da Polyscience, Inc. e seus dados estão resumido na Tabela 3.2.

Tamanho (Rótulo)	3	6	9
Número de catálogo	17134	07312	17136
Diâmetro médio ( $\mu\text{m}$ )	3,135	5,721	9,146
Dispersão ( $\mu\text{m}$ )	0,146	0,273	0,577
Dispersão (%)	4,4	4,8	6,3

**Tabela 3.2 – Dados segundo o fabricante das microesferas utilizadas.**

Pode-se esperar um desvio da ordem de 1% no índice de refração, caso impurezas estejam presentes, o índice de refração do poliestireno ajustado pela relação de dispersão de Cauchy é (Ma, 2003),

$$n_p(\lambda) = 1,5725 + \frac{0,0031080}{\lambda^2(\mu\text{m})} + \frac{0,00034779}{\lambda^4(\mu\text{m})}. \quad (3.17)$$

Diferentemente de outros experimentos (Wright, 1994; Felgner, 1995), as microesferas foram dispersas em baixas concentrações, somente em água destilada sem qualquer outra adição e colocadas na câmera de Neubauer. Todos os experimentos foram realizados com microesferas em água destilada e deionizada (DI) a 293K. Soluções mãe foram preparadas diluindo 0,4 $\mu\text{l}$  em 4,5ml de água DI (concentrações de aproximadamente  $10^5/\text{cm}^3$ ) e armazenadas em geladeira até 3 dias no máximo. A água é um dos solventes de menor índice de refração disponível, portanto com a sua utilização teremos o maior contraste possível em índice de refração e portanto a melhor possibilidade de observar os MDRs em microesferas. O índice de refração da água é (Weber, 2003),

$$n_a(\lambda) = 1,3253 + \frac{0,0027553}{\lambda^2(\mu m)} + \frac{0,00003779}{\lambda^4(\mu m)}. \quad (3.18)$$

Antes de abrir o *shutter* do laser todas as microesferas se depositam no fundo da câmara de Neubauer. O estágio do microscópio (Priori) pode ser movimentado nos eixos x e y utilizando motores controlados por computador ou por joystick. A partícula aprisionada é colocada a uma altura de  $\sim 50\mu m$  do fundo da câmara utilizando o micrômetro manual antes de qualquer medida.

### 3.2.5 Alinhamento Óptico

O alinhamento deste sistema é muito sensível, já que a distância da saída do laser até a primeira lente é de 7 metros. Um conjunto de regras passo-a-passo está detalhado abaixo para que outros possam tentar reproduzir o experimento. Durante todo o processo o visor de infravermelho, o cartão detector e um cartão com furo de agulha são indispensáveis para o alinhamento do laser infravermelho de Ti:Safira. Caso não seja possível o ideal é aumentar a potência e baixar o comprimento de onda para um valor o mais perto do vermelho possível.

- (1) O procedimento padrão de alinhamento é garantir que o feixe incida na primeira lente sempre na mesma posição (centrado) e normal. Para isto montamos dois pares de espelhos, um na saída do laser e outro a 70cm antes da primeira lente ( $f_1$ ). O propósito destes espelhos é manipular a direção de incidência do feixe através da técnica *walk the beam*.
- (2) Todas as lentes foram retiradas (exceto aquelas que não podem ser removidas como a lente  $f_4$ ) do caminho óptico, que leva o feixe do laser à entrada da objetiva. Garantiu-se que o feixe chegasse até a entrada da objetiva, passando aproximadamente pelo centro das montagens das lentes vazias. Por fim utilizando o monitor obteve-se um padrão de

círculos concêntricos, à medida que a altura da câmera de Neubauer era alterada.

- (3) A primeira lente ( $f_1$ ) montada sobre um estágio de translação, deve ter seu estágio alinhado tal que a face esteja centrada durante todo o percurso. Para isto utilizou-se um pinhole na posição da lente e uma íris antes, para limitar a largura do feixe e marcar a posição. Utilizou-se também um medidor de potência para centrar a íris e o pinhole. Em seguida alinhou-se o estágio de translação à medida que este se deslocava, sempre verificando a potência.
- (4) Abriu-se então a íris e colocou-se a lente  $f_1$ . Para garantir a posição de centro da primeira lente e incidência normal, utilizamos a interferência entre as duas superfícies da lente. Posicionando o cartão com furo entre a primeira face da lente e o laser a uma distância igual a distância focal da lente. Manipulou-se o feixe utilizando o par de espelhos mais próximos. No cartão foi possível observar duas manchas referentes as duas reflexões das duas faces. Primeiramente procurou-se transladar a lente na direção  $x - y$  até estas duas manchas ficarem próximas. Em seguida os dois ângulos de rotação da lente foram controlados para tentar sobrepor as duas manchas. Repetiu-se a translação e rotação até que ambos convergissem e formassem um padrão de interferência.
- (5) Nesta fase a lente que está montada sobre um estágio de translação, precisa de um ajuste fino no alinhamento, tal que sua face esteja centrada durante todo o percurso. Para isto foi necessário repetir o procedimento (4) para as posições extremas do estágio de translação, junto à técnica *walk the beam*.
- (6) Colocou-se a lente  $f_2$  e afastou-se o máximo possível a lente  $f_1$  utilizando o estágio. Observando no monitor, o feixe foi centralizado na lente  $f_2$  até que os padrões circulares aparecessem no vídeo (utilizou-se o ajuste de foco do microscópio). Em seguida foi realizado o ajuste fino do alinhamento utilizando o passo (4).



- (7) O próximo passo foi o de centralizar o feixe no espelho do *gimbal mount*, para isto utilizou-se um papel limpador de lentes como espalhador entre as lentes  $f_1$  e  $f_2$  (tomando o devido cuidado para não posicionar o papel no foco). Com um anteparo logo após o *gimbal mount* centrou-se o *spot* do laser (mancha mais intensa) no centro da mancha espalhada delimitada pelo suporte da lente. Com este intuito foram utilizados os controles de translação x-y-z do *gimbal mount*. Retiramos então o anteparo e o papel espalhador.
- (8) Posicionamos a lente  $f_3$  no centro do feixe, observando o monitor para obter os padrões de círculos concêntricos. Realizamos o ajuste fino utilizando o passo (4).
- (9) Antes de passar pela lente  $f_4$  há um par de espelhos para realizar a técnica *walk the beam* para centrar o feixe na lente  $f_4$  e objetiva.

## 3.3 Força Óptica

Vários autores já relataram o sucesso no aprisionamento de esferas de poliestireno com diâmetros entre 1 $\mu$ m e 10 $\mu$ m na pinça óptica. As nossas tentativas foram realizadas com esferas de 3, 6 e 9 $\mu$ m (Polyscience) suspensas em água destilada.

As partículas foram pinçadas primeiramente subindo a câmera de Neubauer até que o fundo deste estivesse no plano imagem da objetiva. Uma vez nesta posição foi possível observar as esferas que desta vez foram posicionadas no plano focal. Nesta posição, elas são facilmente aprisionadas, bastando apenas mover o estágio nas direções x-y até que uma partícula caia na armadilha. O aprisionamento é verificado quando o estágio é transladado, produzindo uma força de arraste de Stokes à medida que o meio em suspensão é varrido através da partícula aprisionada. A óptica para guiar o feixe foi demonstrada transladando em uma linha

no plano imagem a partícula aprisionada. O cuidado de sobre preencher adequadamente a entrada da objetiva é muito importante para o aprisionamento axial, pois tendo uma intensidade adequada de feixes na borda externa da lente a objetiva atinge a partícula num ângulo maior que a normal e contribue em sua maior parte com a força de gradiente (Wright, 1994; Svoboda, 1994).

O aprisionamento axial descrito por Svoboda (1994), descrevem em suas experiências, que as partículas de sílica puderam ser aprisionadas até uma profundidade de até 200µm abaixo da lamínula, enquanto as de poliestireno puderam ser aprisionadas somente a profundidades de até 10µm. A suposição era que os efeitos de aberrações esféricas poderiam afetar a cintura do feixe abaixo da lamínula quando as esferas de poliestireno eram aprisionadas, devido provavelmente, ao fato do seu índice de refração ser maior. Não nos deparamos com este problema pois foi possível aprisionar estas micro-esferas em toda a profundidade da câmera de Neubauer de quase 100µm. Os efeitos de aberração esférica são importantes para esferas menores do comprimento de onda, as menores utilizadas aqui nesta tese são de 3 microns em diâmetro.

As micro-esferas de poliestireno utilizadas neste experimento têm um índice de refração de 1,58 para 785nm. Um cálculo simples utilizando as equações de Fresnel para refletância e transmitância, (Saleh, 1991) fornece a potência refletida com incidência normal para a luz vinda de um meio cujo índice de refração seja  $n_1$  para outro com índice de refração  $n_2$ , de acordo

$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2. \quad (3.19)$$

Fazendo  $n_1$  o índice de refração da água, esta equação fornece a refletância na interface água para poliestireno de  $7,3 \times 10^{-3}$ , mais que 3 vezes maior que o valor de  $R$  para a sílica. Esta conta é apenas sugestiva pois uma expressão similar seria necessária para examinar a dependência da força de gradiente, porém pode-se notar que a força de espalhamento deve ser mais difícil para superar materiais de alto índice de refração.

### 3.3.1 Medidas de Força Radial

Para realizar as medidas de força radial em microesferas de diferentes tamanhos variando o comprimento de onda, a polarização e potência do feixe incidente, utilizamos uma outra pinça, de menor potência, atuando como perturbador, sendo esta armadilha modulada por um chopper mecânico (10Hz). O sinal detectado que é proporcional ao deslocamento é proveniente de um laser de HeNe, que ilumina a microesfera pela mesma objetiva utilizada para o aprisionamento. O laser utilizado para a armadilha foi o de Nd:YAG e para a perturbação o laser de Ti:Safira.

Antes de realizar a medição pinçamos uma microesfera do fundo da câmera, e a trazemos até metade da câmera de Neubauer (50 $\mu$ m). Em seguida centramos os dois feixes perturbador e de aprisionamento. Para isto retirou-se o filtro de Densidade Neutra (ND) e desligou-se o *chopper* mecânico do feixe perturbador (Ti:Safira) tal que toda a potência útil foi utilizada para aprisionar a microesfera. Logo interrompemos o feixe de Nd:YAG em curtos intervalos, e deslocamos o feixe de Ti:Safira utilizando o estágio motorizado até o centro da armadilha. Nesta posição, a microesfera sofre a menor perturbação possível visível pelo monitor. Podemos então atenuar o feixe perturbador e ligar o *chopper* mecânico.

O movimento radial da pinça foi controlado pelo estágio de translação através da interface GPIB pelo uso do software Labview. O software deslocava o motor em incrementos regulares, aguardava 1seg (devido a constante de tempo do lockin) e adquiria o sinal e fase do lockin. Repetia-se este ciclo até que todos os pontos fossem coletados. No final os dados foram registrados em arquivos para interpretação posterior.

Resta enfim a calibração, ou seja como fazer a correspondência do passo dado pelo motor com o deslocamento do feixe perturbador em relação ao feixe da armadilha. A calibração é feita utilizando-se o estágio de translação do microscópio e o monitor além do estágio de rotação do *gimbal mount*. No fundo da câmera de Neubauer, centramos um quadrado de 50 $\mu$ m no monitor utilizando o *joystick* para controlar o estágio do microscópio e o foco para ajustar a imagem. Utilizando o estágio do *gimbal mount* deslocamos o *spot* do feixe focalizado até a ranhura inferior.

Através de um outro software escrito no Labview, deslocamos o estágio do microscópio em intervalos regulares de  $2\mu\text{m}$  e portanto deslocando a ranhura da câmera em relação ao spot do laser. Em seguida recuperamos a posição do *spot* sobre a ranhura deslocando o estágio do *gimbal mount*. Estas posições são registradas e ajustadas para obtermos a calibração da posição axial em função da posição do laser.

Os resultados deste experimento junto à sua interpretação serão apresentados no próximo capítulo.

### 3.3.2 Medidas de Força Axial

Para realizar a medidas de força axial em microesferas de diferentes tamanhos variando o comprimento de onda, polarização e potência do feixe incidente, utilizamos o mesmo esquema da força radial. Só que desta vez utilizou-se o estágio de translação do telescópio, cujo movimento radial é controlado pelo Labview. Como não podemos visualizar a distância axial no monitor para calibração da distância, utilizamos outro método. Colocamos microesferas fluorescentes, e o laser Tsunami como o feixe perturbador. Utilizamos a luminescência por absorção de dois fótons para determinar a posição do feixe perturbador em relação à armadilha. Para isto deslocamos a partícula na armadilha com o laser de Nd:YAG e procuramos a posição do telescópio que gerava o maior sinal de luminescência na PMT. O deslocamento foi feito sempre no mesmo sentido para evitar o erro sistemático do *backlash*. As posições do micrômetro do foco do microscópio foram incrementadas em intervalos regulares de  $2\mu\text{m}$  e o passo do motor que corresponde à posição do telescópio registrado.

A calibração e os resultados deste experimento junto à sua interpretação serão apresentados no próximo capítulo.

## 3.4 Excitação dos Modos MDR

O acoplamento eficiente dos modos MDR requer além de sintonizar o comprimento de onda do feixe de excitação, o casamento do momento angular do feixe incidente com o momento angular do MDR. De acordo com a descrição de van de Hulst (1981), uma iluminação tangencial à borda é necessária para que as ondas de superfície interfiram construtivamente para criar os MDRs (Barton, 1989). A teoria prevê um acoplamento eficiente de um feixe gaussiano focalizado ao modo  $n$  do MDR, quando o feixe estiver posicionado logo do lado de fora da cavidade esférica. A razão teórica (Lock, 1995) para isso é que as funções de Bessel esféricas,  $j_n(m_e kr)$ , dentro da microesfera se acoplam à função de Bessel esférica  $j_n(kr)$  do lado de fora da partícula. Como a densidade de energia de um MDR é maior logo dentro da superfície da partícula, temos que ter  $n \geq m_e ka$  tal que  $j_n(m_e kr)$  possa ter um máximo nesta posição. Mas o parâmetro de impacto clássico  $b$  do feixe geométrico de luz associado à onda da partícula  $n$  é  $n \approx kb$ , precisamos então  $b/a \leq n$  para a excitação do MDR. Este parâmetro de impacto descreve um feixe de luz que passa pelo lado externo da superfície da microesfera (Nussenzveig, 1992).

A excitação dos modos MDR em microesferas são obtidos deslocando-se o feixe laser em relação ao centro da microesfera até a borda. Este ponto da borda é determinado utilizando a seguinte estratégia:

- (i) Garantir que o feixe de aprisionamento (Nd:YAG) esteja capturando a partícula no plano objeto. Esta parte sempre requer alguns ajustes para tamanhos de esferas diferentes. Para corrigir isso basta deslocar manualmente a primeira lente do telescópio do feixe de aprisionamento enquanto a imagem da esfera entrando em foco é apresentada no monitor.
- (ii) Centrar os dois feixes, perturbador e de aprisionamento. Para isto retira-se o filtro de Densidade Neutra (ND) e desliga-se o *chopper* mecânico do feixe perturbador (Ti:Safira) tal que toda a potência útil seja utilizada para aprisionar a microesfera. Interrompe-se o feixe de

Nd:YAG em curtos intervalos, desloca-se o feixe de Ti:Safira utilizando-se o estágio motorizado até o centro da armadilha. Nesta posição, a microesfera sofre a menor perturbação possível ainda visível no monitor.

- (iii) Ao invés de deslocar o feixe perturbador para a borda desloca-se o de aprisionamento, devido à facilidade de manuseio pelo controle automatizado do picomotor. Desloca-se lateralmente o feixe até a borda até onde a imagem da microesfera no monitor aparenta o mais fora de foco possível.
- (iv) Com o feixe nesta posição será possível observar os modos de ressonâncias de MIE. Agora basta apenas rodar o programa de aquisição que controla o comprimento de onda do Ti:Safira para localizar um dos picos. Neste comprimento de onda de ressonâncias, a oscilação da partícula no vídeo é máxima. Um ajuste fino na posição do feixe permite um acoplamento ainda melhor, para isto desloca-se o feixe no sentido saindo da borda da microesfera em pequenos passos com o picomotor e maximiza-se a intensidade de sinal no *Lock-in Amplifier*.
- (v) Nesta posição otimizada, aciona-se o programa de captura.

O programa de controle é feito utilizando-se o software Labview que controla um motor de rotação que gira uma placa birrefringente dentro do laser de Ti:Safira, controlando assim seu comprimento de onda e a aquisição de dados através do *lock-in*. Os dados de sinal e fase são registrados em arquivo para posterior interpretação.

A calibração da posição do motor com o comprimento de onda é feito utilizando-se o espectrômetro. Para cada posição do motor é registrado, o comprimento de onda correspondente ao pico do espectro adquirido. No final podemos relacionar o comprimento de onda com a posição do motor.

A calibração e os resultados deste experimento para diferentes polarizações serão apresentados no próximo capítulo.

## 3.5 Referências Bibliográficas

- Ashkin, A.; Dziedzic, J.M.; Bjorkholm, J.E.; Schu, S. Observation of Single-Beam Gradient Force Optical Trap for Dielectric Particles. **Opt Lett**, 11(5):288-290, 1986.
- Barton, J.P.; Alexander, D.R.; Schaub, S.A. Internal Fields of a Spherical-Particle Illuminated by a Tightly Focused Laser-Beam - Focal Point Positioning Effects at Resonance. **J Appl Phys**, 65(8):2900-2906, 1989.
- Berns, M.W. Laser scissors and tweezers. **Sci Am**, 278(4):62-67, 1998.
- Fallman, E.; Axner, O. Design for fully steerable dual-trap optical tweezers. **Appl Opt**, 36(10):2107-2113, 1997.
- Felgner, H.; Müller, O.; Schliwa, M. Calibration of Light Forces in Optical Tweezers. **Appl Opt**, 34(6):977-982, 1995.
- Friese, M.E.J.; Rubinsztein-Dunlop, H.; Heckenberg, N.R.; Dearden, E.W. Determination of the force constant of a single-beam gradient trap by measurement of backscattered light. **Appl Opt**, 35(36):7112-7116, 1996.
- Friese, M.E.J.; Truscott, A.G.; Rubinsztein-Dunlop, H.; Heckenberg, N.R. Three-dimensional imaging with optical tweezers. **Appl Opt**, 38(31):6597-6603, 1999.
- Ishijima; Kojima, H.; Funatsu, T.; Tokunaga, M.; Higuchi, H.; Tanaka, H.; Yanagida, T. Simultaneous observation of individual ATPase and mechanical events by single myosin molecule during interaction with actin. **Cell**, 92:161-171, 1998.
- Lock, J.A. Improved Gaussian Beam-Scattering Algorithm. **Appl Opt**, 34(2):559-570, 1995.
- Ma, X.; Lu, J.Q.; Scott Brock, R.; Jacobs, K.M.; Yang, P.; Hu, X. Determination of complex refractive index of polystyrene microspheres from 370 to 1610 nm. **Phys Med Boil**, 48:4165-4172, 2003.
- Nussenzveig, H.M. Diffraction effects in semiclassical scattering, Cambridge University Press, 1992.
- Purcell, E.M. Life at Low Reynolds Number. **Am J Phys**, 45(3):124, 1977.
- Saleh, B.E.A.; Teich, M.C. Fundamentals of Photonics, John Wiley & Sons, 1991.
- Simmons, R.M.; Finer, J.T.; Chu, S.; Spudich, J.A. Quantative measurements of force and displacement using an optical trap. **Biophys J**, 70:1813-1822, 1996.
- Smith, M.W.; Bhalotra, S.R.; Brody, A.L.; Brown, B.L.; Boyda E.K.; Prentiss, M. Inexpensive optical tweezers for undergraduate laboratories, **Am J Phys**, 67(1):26-35, 1999.
- Svoboda, K.; Block, S.M. Biological applications of optical forces, **Annu Rev Biophys Biomol Struct**, 23:247-285, 1994.
- Van de Hulst, H.C. Light Scattering by Small Particles (Dover, New York, 1981)

Visscher, K.; Schnitzer, M.J.; Block, S.M. Single kinesin molecules studied with a molecular force clamp. **Nature**, 400:184-189, 1999.

Weber, M.J. Handbook of Optical Materials, CRC Press, Washington, 2003.

Wright, W.H.; Sonek, G.J.; Berns, M.W. Parametric study of the forces on microspheres held by optical tweezers. **Appl Opt**, 33(9):1735-1748, 1994.



# Capítulo 4

## Resultados

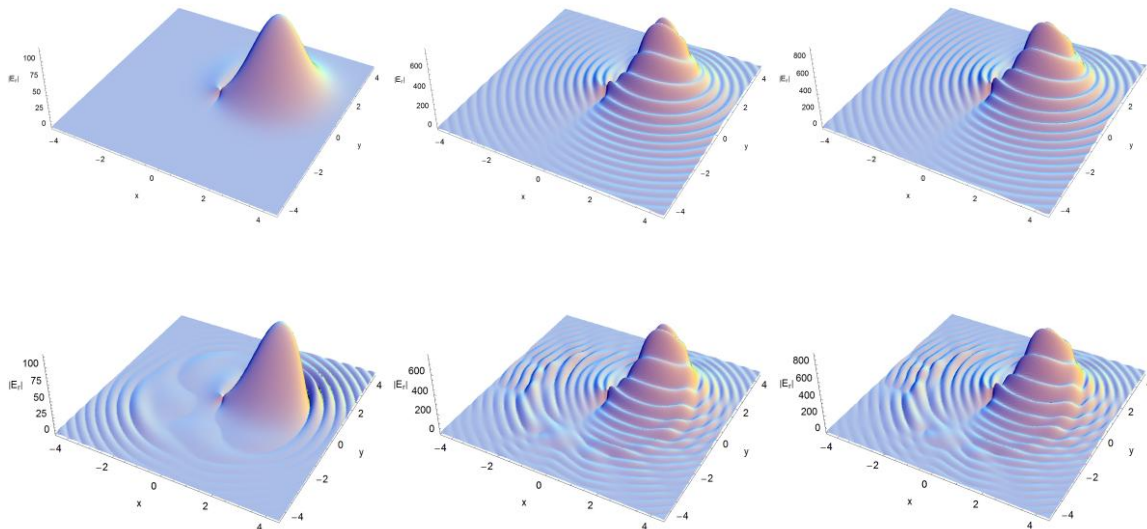
*"It doesn't matter how beautiful your theory is,  
it doesn't matter how smart you are.  
If it doesn't agree with experiment, it's wrong".  
Richard P. Feynman*

Nesta seção iremos primeiramente validar e simular a teoria apresentada no Capítulo 2, através de algumas simulações realizadas utilizando o software Mathematica (versão 5.2), os programas estão incluídos no Apêndice C. Em seguida vamos exibir os dados experimentais medidos e compará-los com a teoria junto com as medidas de calibração da pinça óptica.

## 4.1 Validação

Primeiramente vamos avaliar as expansões de multipolos comparando os campos elétricos e magnéticos radiais obtidos pela Representação do Espectro Angular com os resultados do Método Exato. Optamos pelo campo radial, pois somente este determina completamente os coeficientes do fator de forma do feixe como demonstrado nas equações (2.223) e (2.224). Como variáveis de entrada em relação à característica do feixe temos: o comprimento de onda, largura do feixe antes da objetiva e a posição cartesiana do foco. Das características relacionadas à objetiva temos: a distância focal efetiva da objetiva e a abertura numérica. Destas grandezas determinamos: o número de onda, o semi-ângulo da abertura máxima, e o fator de preenchimento da objetiva. Os detalhes computacionais e o programa estão nos apêndices C.1 e C.2 respectivamente.

Simulamos o campo incidente no plano  $z = 0$  para 3 posições representativas do foco do feixe incidente para ilustrar a aproximação nas figuras abaixo.

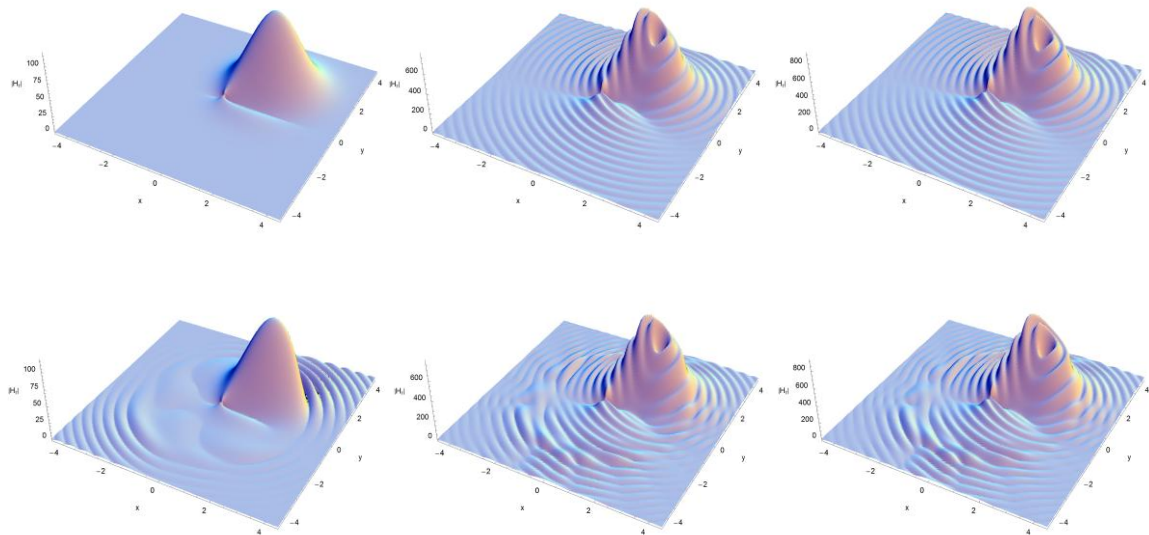


**Figura 4.1 – Módulo do campo elétrico radial. Da esquerda para direita temos os fatores de preenchimento ( $f_0$ ) de .177, 1.77 e 17.7 respectivamente. (Acima) Simulação do feixe pela REA com o foco em (1.5,1.5,1.5)  $\mu\text{m}$ . (Abaixo) a reconstrução do feixe pelos coeficientes de forma do feixe até  $N=30$ .**

Na Figura 4.1 podemos observar quantitativamente o modelo, o perfil do campo é quase idêntico, para a contribuição dos primeiros 30 termos da expansão, esta que vai até o infinito. É possível notar nos gráficos inferiores um anel de perturbação. Da origem até o anel os 30 termos dão conta do resultado, mas não fora desta região como pode ser observado na figura mais a esquerda. Neste caso devemos somar mais termos. A quantidade de termos a serem somados é dado aproximadamente pela relação,

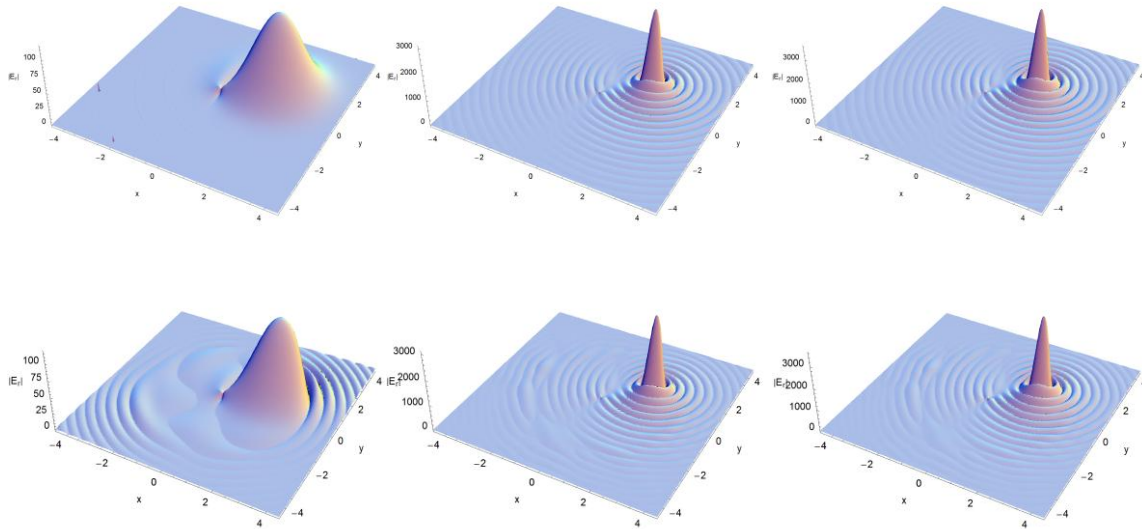
$$kr = N. \quad (4.1)$$

A função de Bessel esférica é responsável por esta localização radial já que esta função tem o seu máximo para uma posição  $kr$  em uma ordem dada por  $N = kr$ . Das figuras a extrema esquerda podemos notar a ausência dos anéis de difração, neste caso o feixe tem uma largura dez vezes menor que a abertura da objetiva e por consequência não tem os anéis.



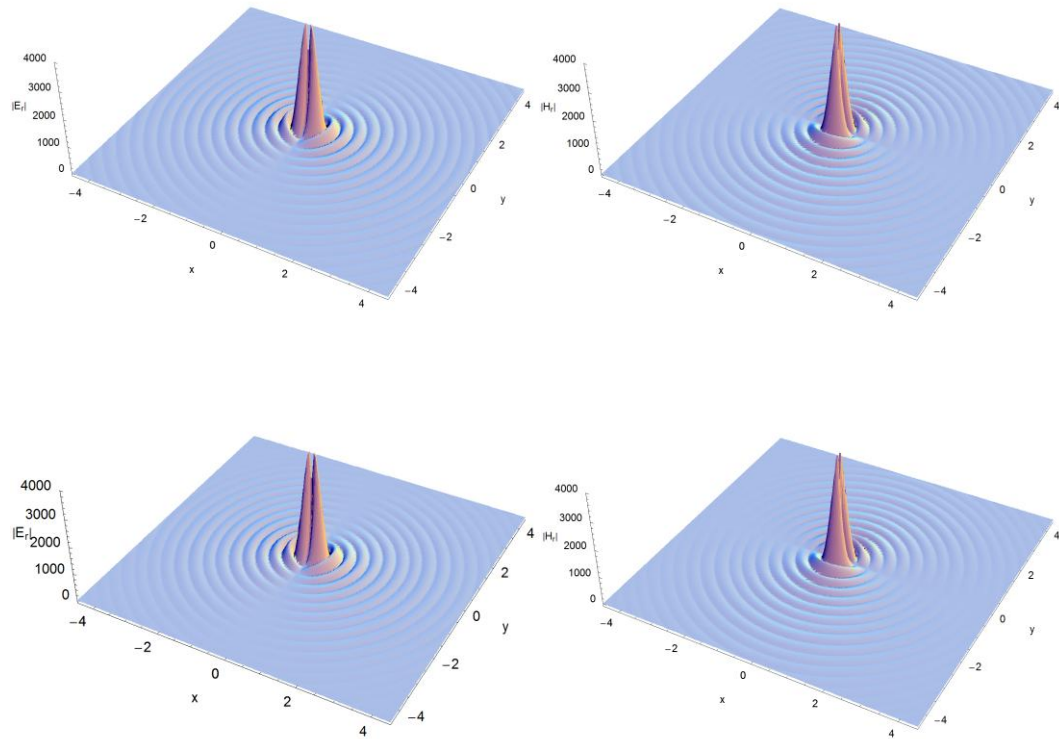
**Figura 4.2 - Módulo do campo magnético radial. Da esquerda para direita temos os fatores de preenchimento ( $f_0$ ) de .177, 1.77 e 17.7 respectivamente. (Acima) Simulação do feixe pela REA com o foco em  $(1.5, 1.5, 1.5) \mu\text{m}$ . (Abaixo) a reconstrução do feixe pelos coeficientes de forma do feixe até  $N=30$ .**

A Figura 4.2 representa o campo magnético do feixe na mesma posição que o campo anterior. A diferença entre os campos é a rotação de  $\pi/2$  (em torno do foco) do perfil do campo magnético em relação ao campo elétrico.



**Figura 4.3 - Módulo do campo elétrico radial. Da esquerda para direita temos os fatores de preenchimento ( $f_0$ ) de .177, 1.77 e 17.7 respectivamente. (Acima) Simulação do feixe pela REA com o foco em  $(1.5, 1.5, 0.0) \mu\text{m}$ . (Abaixo) a reconstrução do feixe pelos coeficientes de forma do feixe até  $N=30$ .**

Já a Figura 4.3 representa o módulo do campo elétrico radial no plano focal da objetiva ( $z_0 = 0$ ). Podemos notar o aumento no perfil da intensidade e seu estreitamento em relação a posição anterior, levemente acima da posição focal da objetiva.



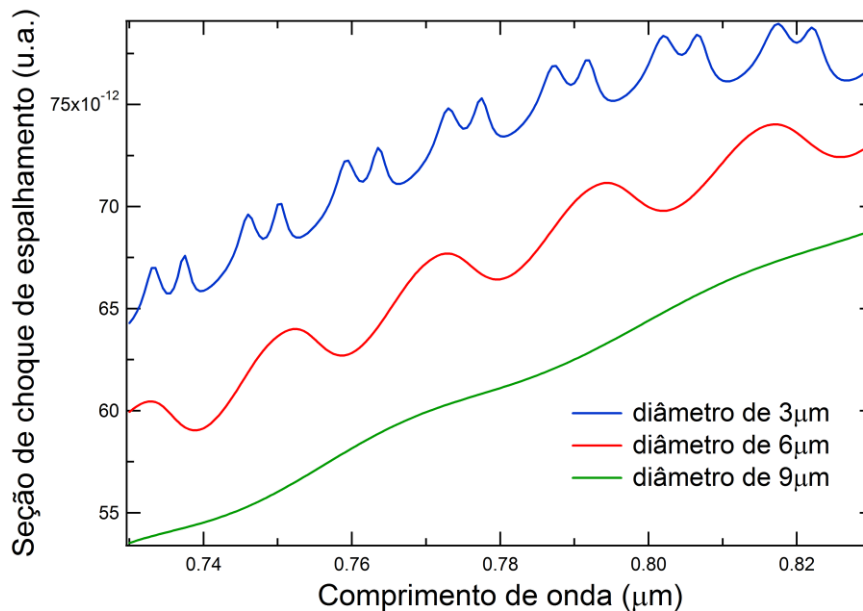
**Figura 4.4 - Fatores de preenchimento ( $f_0$ ) de 1.77 com o foco posicionado na origem. (Acima) Simulação do feixe pela REA. (Abaixo) a reconstrução do feixe pelos coeficientes de forma do feixe até  $N=30$ . (Esquerda) Módulo do campo elétrico radial. (Direita) Módulo do campo elétrico radial.**

Nesta última figura da validação (Figura 4.4) podemos observar como o feixe comporta-se na origem, fica evidente a simetria de  $\pi/2$  entre os campos elétricos e magnéticos.

Tendo comprovado a eficácia dos coeficientes  $G_{nm}^{TM}$  e  $G_{nm}^{TE}$  vamos agora simular as forças ópticas.

## 4.2 Forças Ópticas: Simulação

De acordo com as micro esferas utilizadas no experimento, a simulação foi feita para três tamanhos de micro-esferas diferentes,  $3\mu\text{m}$ ,  $6\mu\text{m}$  e  $9\mu\text{m}$ , respectivamente. Para todas as simulações utilizamos: a largura do feixe incidente na objetiva com um valor de  $5\text{mm}$ ; a distância focal da objetiva como sendo  $1,7\text{mm}$ ; abertura numérica da objetiva como sendo  $1.25$ . Variamos o tamanho do fator de preenchimento da objetiva  $f_o$ , polarização e comprimento de onda tal que a ressonância de Mie da microesfera fosse excitada. Para mostrar a dependência da ressonância com o comprimento de onda, abaixo esta uma figura para os três tamanhos utilizados nas simulações.



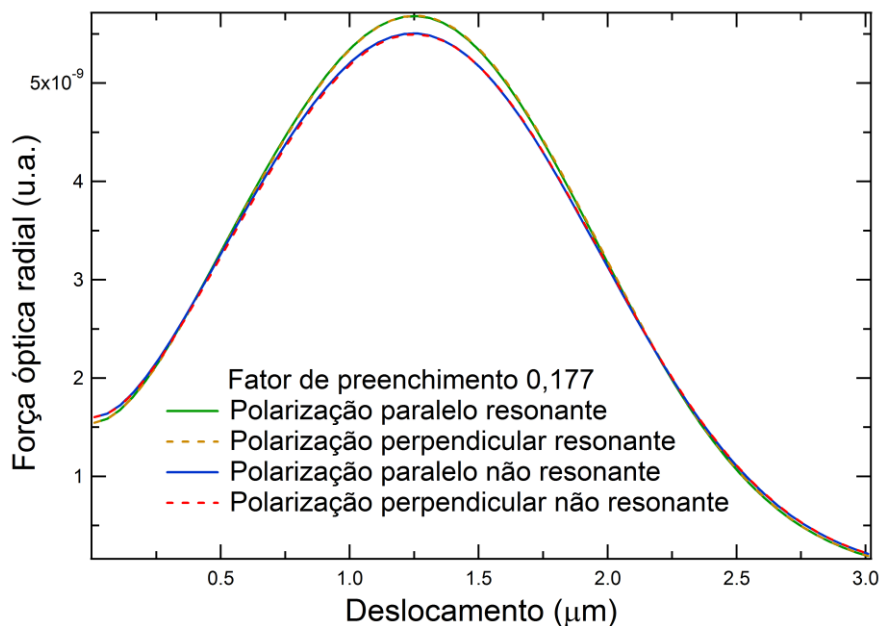
**Figura 4.5 – Ressonâncias de Mie em microesferas de poliestireno em água.**

Podemos notar que para a faixa de comprimento de onda do laser de Ti:Safira, a microesfera de  $9\mu\text{m}$  em diâmetro é a única cujos modos de excitação TM e TE não estão sobrepostos. Já a medida que o fator de tamanho diminui, e portanto o tamanho da esfera, estas frequências de ressonâncias alargam-se e vão se

distanciando entre as frequências vizinhas. Vamos iniciar os resultados das forças radiais e em seguida será apresentado os da força axial.

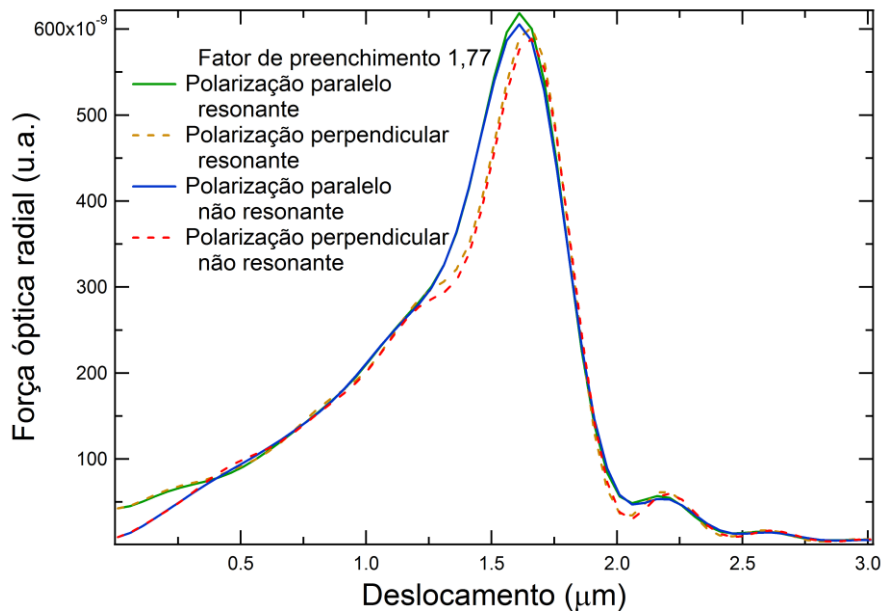
## 4.2.1 Forças Radiais

As forças calculadas nesta seção vem das equações, (2.136) e (2.135) onde a contribuição em  $z$  é somada vetorialmente. Já os coeficientes de forma são dados por, (2.240) e (2.241). O programa está no apêndice C.4.



**Figura 4.6 – Força radial versus posição do centro de uma microesfera de poliestireno de 3 μm.**

Podemos observar (Figura 4.6) que para um fator de preenchimento de quase um quinto da objetiva, a força radial 0.17 é praticamente igual para as duas polarizações. A única diferença é o fato de que no comprimento de onda ressonante (766,7nm), a força é 3,5% maior no seu ponto máximo localizado a 1,2 μm, (dentro da esfera) do que com um comprimento de onda fora da ressonância (787,1nm).



**Figura 4.7 - Força radial versus posição do centro de uma microesfera de poliestireno de 3µm.**

Agora, quando sobre-preenchemos a abertura da objetiva (Figura 4.7), podemos notar novamente uma pequena diferença de intensidade na região da borda da microesfera, na verdade o máximo da força está localizado fora da esfera (1,66µm). Esta diferença, devido à ressonância (2,3%) está localizada justamente na região onde é mais fácil acoplar com o modo ressonante. Surgem também pequenas ondulações à medida que nos distanciamos da superfície da microesfera.

Devido ao fato do diâmetro da lente objetiva ser de extensão finita, o feixe gaussiano incidente tem portanto parte de sua cauda retirada. No foco já não é mais obtido um perfil puramente gaussiano e ondulações surgem tanto na direção radial quanto na direção axial como veremos mais adiante.



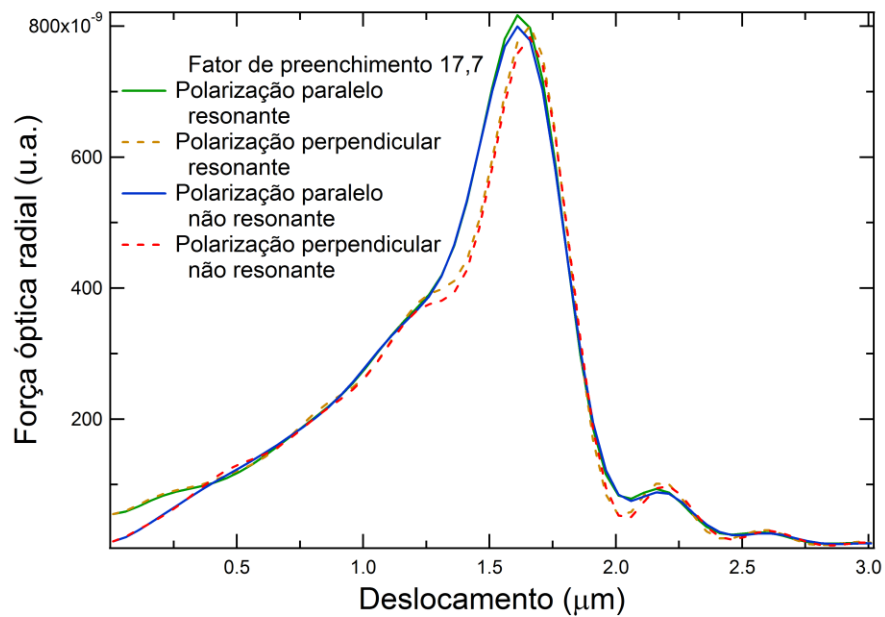


Figura 4.8 - Força radial versus posição do centro de uma microesfera de poliestireno de  $3\mu\text{m}$ .

Já, á medida em que aumentamos o fator de preenchimento de 10 vezes (Figura 4.8), pouco muda no perfil da força radail. Podemos observar que para o movimento do feixe perpendicular ao movimento o alcance desta força é levemente maior. Já se sobrepormos os dois últimos gráficos para o caso não ressonante,

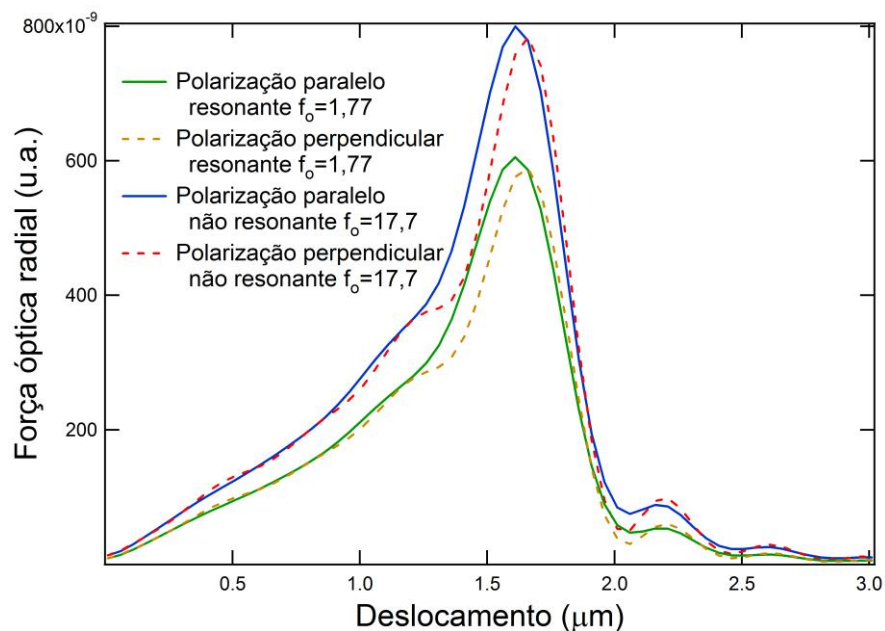
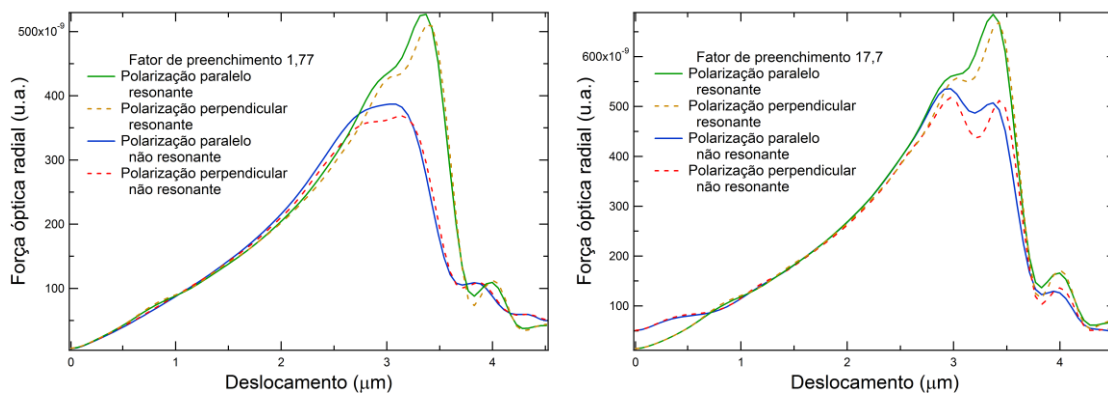


Figura 4.9 - Força radial versus posição do centro de uma microesfera de poliestireno de  $3\mu\text{m}$ .

Notamos que as ondulações tornam-se mais fortes na medida em que a cintura do feixe torna-se maior na entrada da objetiva, ou mais estreita no foco (Figura 4.9). Este efeito (difração) tem origem portanto na abertura da objetiva, pois no caso da Figura 4.6, o feixe estava bem distante da abertura e nenhuma ondulação foi detectada. Geralmente sobre-preenche-se a objetiva do microscópio, desta maneira podendo aprisionar as partículas com uma força de gradiente maior, com uma consequência de uma perda da potência do feixe incidente. Isto significa que as contribuições da difração e da potência não uniforme do laser incidente na entrada da abertura são importantes e estão incorporadas no modelo apresentado no Capítulo 2



**Figura 4.10 - Força radial versus posição do centro de uma microesfera de poliestireno de 6µm.**

Para um tamanho maior de uma micro esfera, e sob a condição de sobre-preenchimento da objetiva podemos observar um aumento entre as forças (30%) para o comprimento de onda ressonante (794,4nm) e não ressonante (779,6nm). Este máximo de ressonância está novamente localizado fora da esfera a uma distância de 3,46µm do centro da esfera (Figura 4.10). Fica evidente que as forças para os movimentos paralelos e perpendiculares são diferentes, devido a polarização do feixe, anisotropia da força no plano.

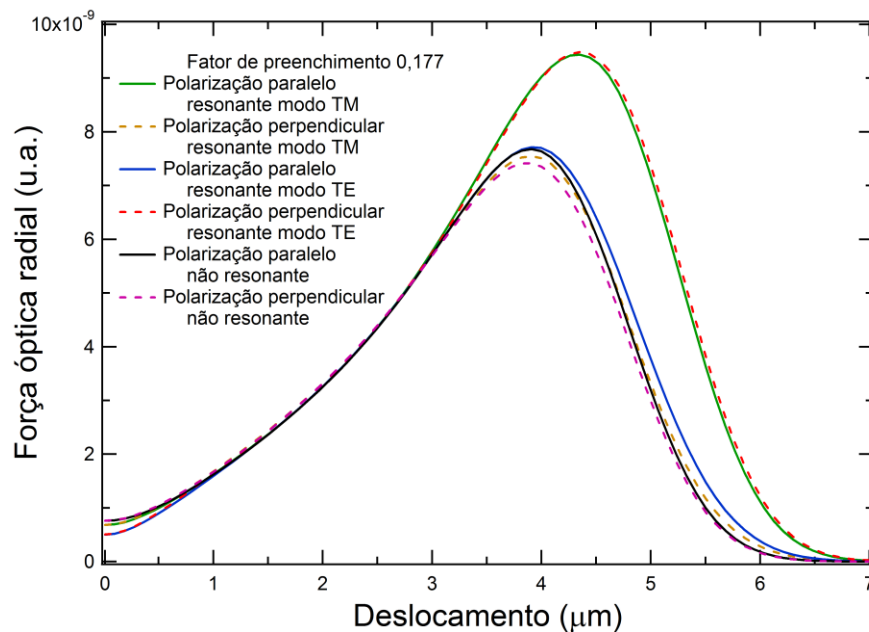


Figura 4.11 - Força radial versus posição do centro de uma microesfera de poliestireno de  $9\mu\text{m}$ .

Para a micro esfera de  $9\mu\text{m}$  de diâmetro temos a condição de ressonância para cada um dos modos TE e TM. Na Figura 4.11, caso de sub preenchimento, já podemos notar o efeito da força no movimento perpendicular (28%) para o modo TE ( $791,75\text{nm}$ ). Idem para o movimento paralelo (23%) para o modo TM ( $787,3\text{nm}$ ).

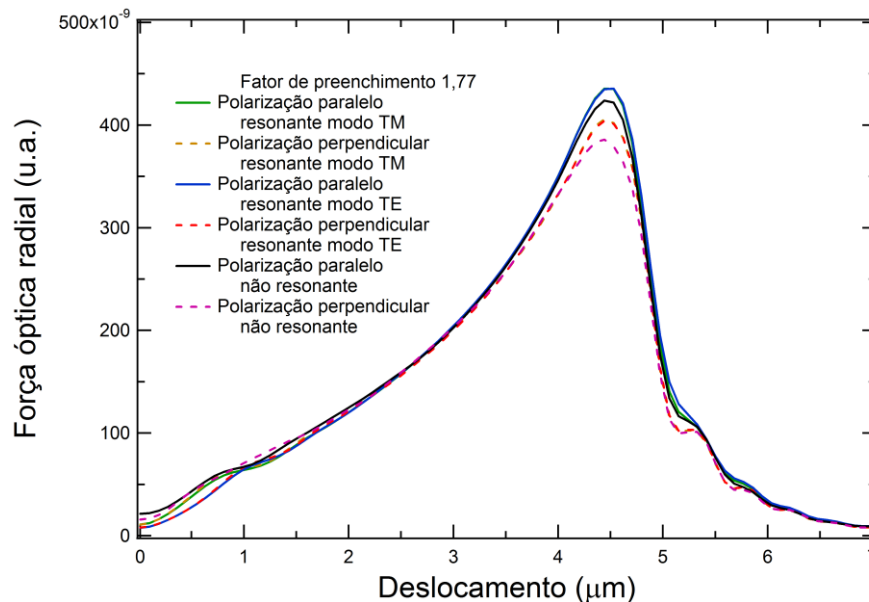
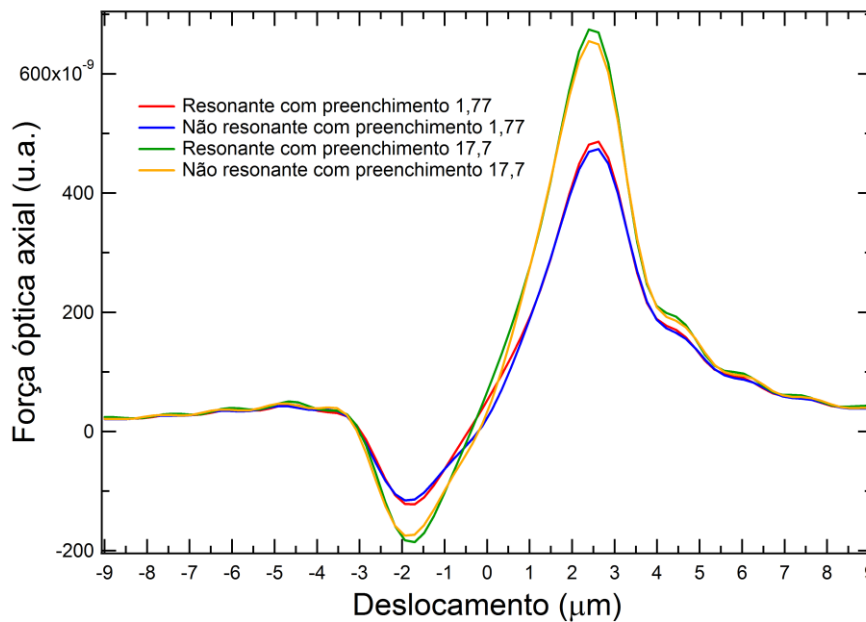


Figura 4.12 - Força radial versus posição do centro de uma microesfera de poliestireno de  $9\mu\text{m}$ .

## 4.2.2 Força Axial

As forças calculadas nesta seção vem da equação (2.135) onde a única contribuição dos coeficientes de forma são para  $m = \pm 1$ , estas forças não dependem da polarização. O programa esta no apêndice C.6.



**Figura 4.13 - Força axial em uma microesfera de poliestireno de  $3\mu\text{m}$ .**

A posição de equilíbrio é aquela onde a curva cruza a abscissa. Podemos notar que o efeito de sobrepreenchimento da objetiva, não só aumenta a força, as ondulações da difração como vimos anteriormente para o caso radial, mas também desloca a posição e equilíbrio. Os ganhos para a esfera de  $3\mu\text{m}$  são de 3% (3,5% para a  $f_0=17,7$ ) na posição fora da esfera em  $2,5\mu\text{m}$ .

Para a situação de ressonância podemos notar que o ponto de equilíbrio de microesfera está mais próximo do foco, isto se verifica inclusive para os para os gráficos seguintes.

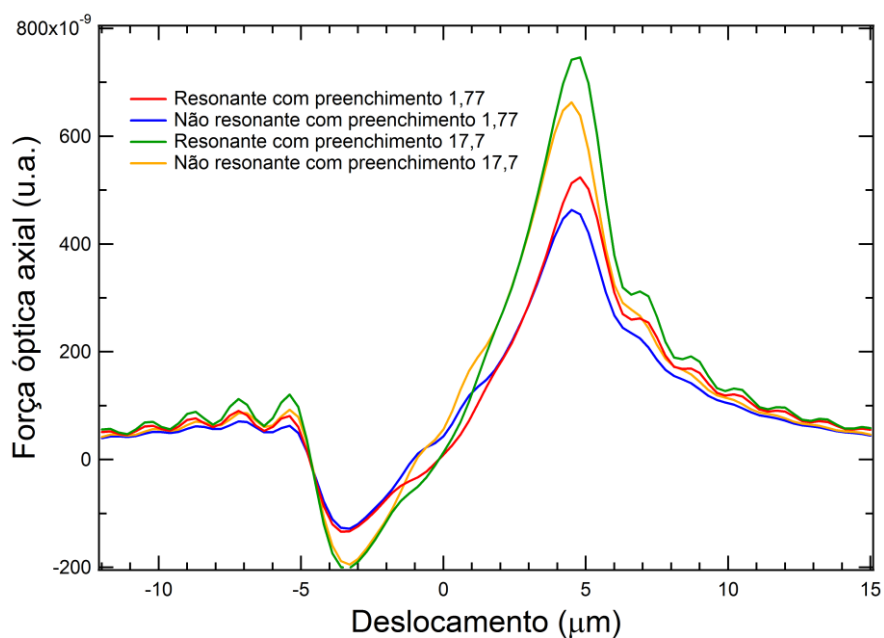


Figura 4.14 - Força axial em uma microesfera de poliestireno de  $6\mu\text{m}$ .

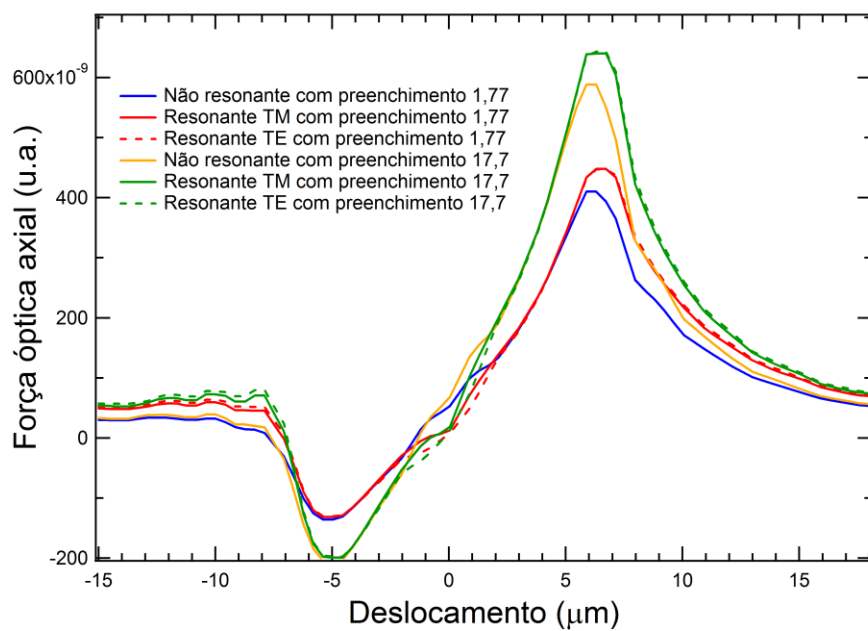


Figura 4.15 - Força axial em uma microesfera de poliestireno de  $9\mu\text{m}$ .

## 4.3 Forças Ópticas: Experimento

Durante os experimentos de força foi tomado cuidado com a potência do feixe incidente, controlado por um filtro de densidade neutra para compensar desigualdade das polarizações da óptica antes da objetiva. A Figura 4.16 ilustra a potência na objetiva em função do comprimento de onda do Ti:Safira para as duas polarizações. As curvas são proporcionais à potência de saída do Ti:Safira, com pouca variação de perda pela óptica em função do comprimento de onda, é mínima, sendo que são as polarizações as grandes responsáveis pela perda.

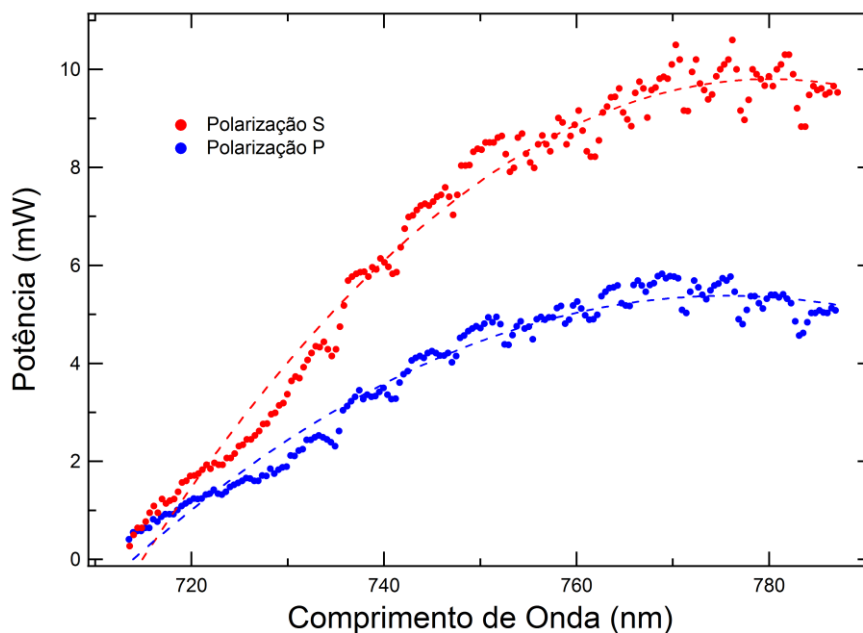
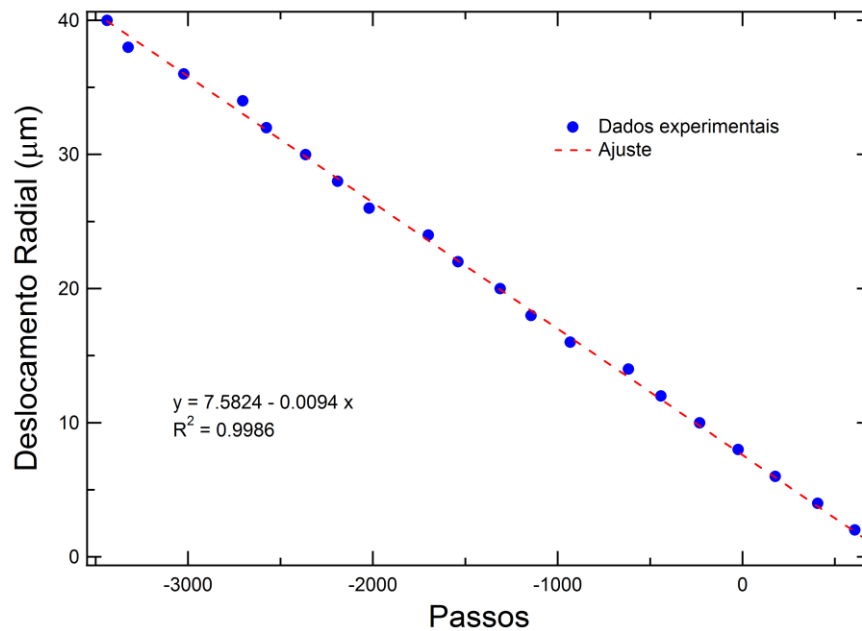


Figura 4.16 – Potência após a objetiva em função do comprimento de onda do Ti:Safira.

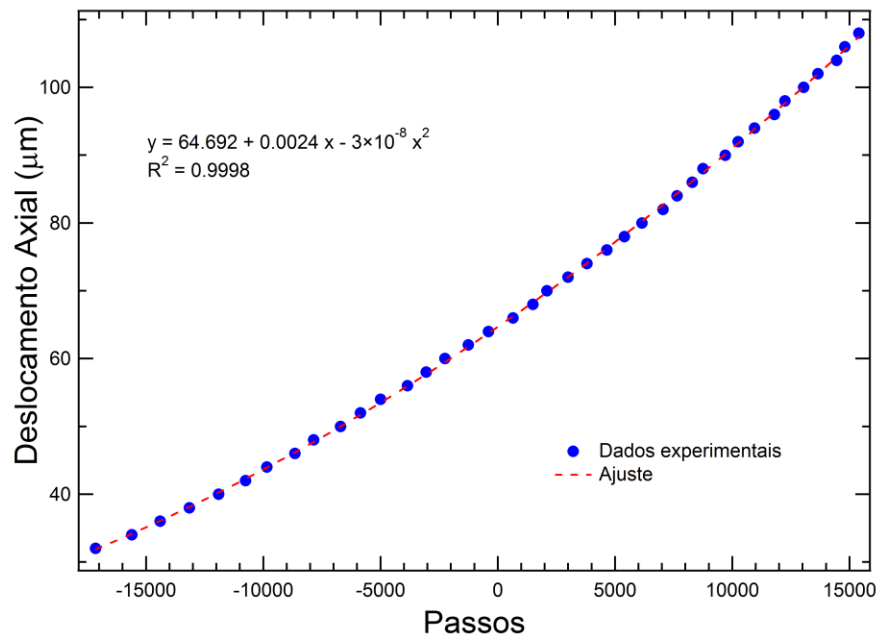
### 4.3.1 Calibrações

Para garantir a fidelidade e reconhecer a posição espacial (micras) em função da posição do motor de passo, foi realizada uma calibração após cada medida, descrita

nas seções 3.3.1 e 3.3.2 para os casos de força radial e axial respectivamente. Da Figura 4.17 podemos observar que o deslocamento radial é de aproximadamente 10nm por passo do motor.



**Figura 4.17 – Calibração Radial - Deslocamento do motor acoplado ao gimbal mount medido com relação ao deslocamento do estágio Priori do microscópio.**

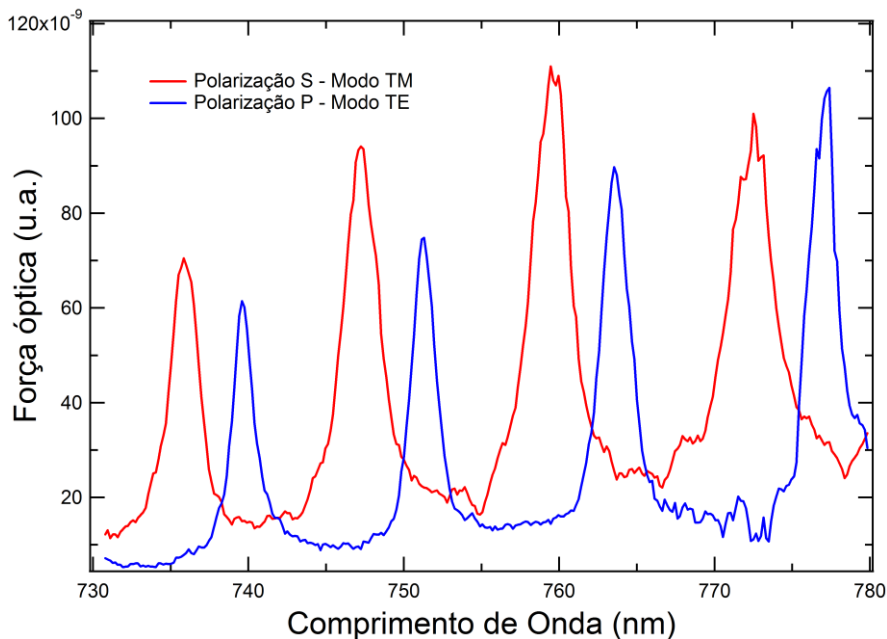


**Figura 4.18 - Calibração Axial - deslocamento do motor de passo controlando o telescópio medida com relação ao deslocamento do foco do microscópio.**

Na Figura 4.18, o ajuste já não é mais linear, como esperado, este representa o deslocamento real da posição do foco do feixe e não simplesmente a localização aparente (focal-shift). Nos dois casos extremos do estágio de translação, cada passo corresponde a 1,2nm por passo (entorno do passo -20000) e 3,6nm por passo (entorno do passo 20000).

### 4.3.2 Ressonâncias

As medidas de ressonâncias foram realizadas como descrito na seção 3.4.



**Figura 4.19 - Ressonâncias de Mie utilizando a força da pinça para uma microesfera de poliestireno de 9 micros de diâmetro.**

As ressonâncias (ou MDR) para os modos TM são excitados antes dos modos TE. A distância entre os picos dos modos diferentes são de aproximadamente 4nm e de 12nm entre os picos de mesmo modo, para esta faixa de comprimento de onda. Através destas informações é possível determinar o comprimento de onda, o índice



de refração ou o diâmetro da microesfera com grande precisão. No caso da Figura 4.19 o resultado dá um valor para o diâmetro de  $9,54\mu\text{m}$  que está dentro da margem fornecida pelo fabricante, Tabela 3.2. O fator de qualidade da cavidade ressonante para o pico em 736nm (TM) é de 350 já a do pico em 740 (TE) é de 500. Para cada um destes comprimentos de onda de ressonância o único campo EM que surgir dentro da microesferas corresponde a um campo elétrico de uma auto-freqüência que se estabelece dentro da esfera. Este campo interage com o campo EM incidente através das condições de contorno (tensor de stress de Maxwell), vide seção 2.2. Podemos esperar então uma mudança significativa na força óptica destas microesferas, e é esta mudança que está representada na Figura 4.19, onde pode-se observar um fator de 5-10 na força óptica nesta determinada posição da esfera.

Na Figura 2.8 vimos que para fatores de tamanhos menores os MDRs tem seus picos correspondentes aos modos TM e TE tão próximos uns dos outros que não podemos distingui-los. Este é o caso para a microesfera de tamanho de  $6\mu\text{m}$  utilizada nas medidas, onde foi apenas simulado na seção anterior, já que não foi possível medir a força óptica no caso dentro da região de ressonância e fora. Diminuindo ainda mais o fator de tamanho (caso da partícula de  $3\mu\text{m}$ ) os picos tornam-se apenas leves saliências.

### 4.3.3 Forças Radiais

Para os experimentos de força radial, variamos o tamanho da micro esfera, o comprimento de onda e polarização para excitar ou não cada um dos MDRs da microesfera. Os resultados estão apresentados nas figuras seguintes onde comparamos com os resultados teóricos da seção anterior (curvas cheias).

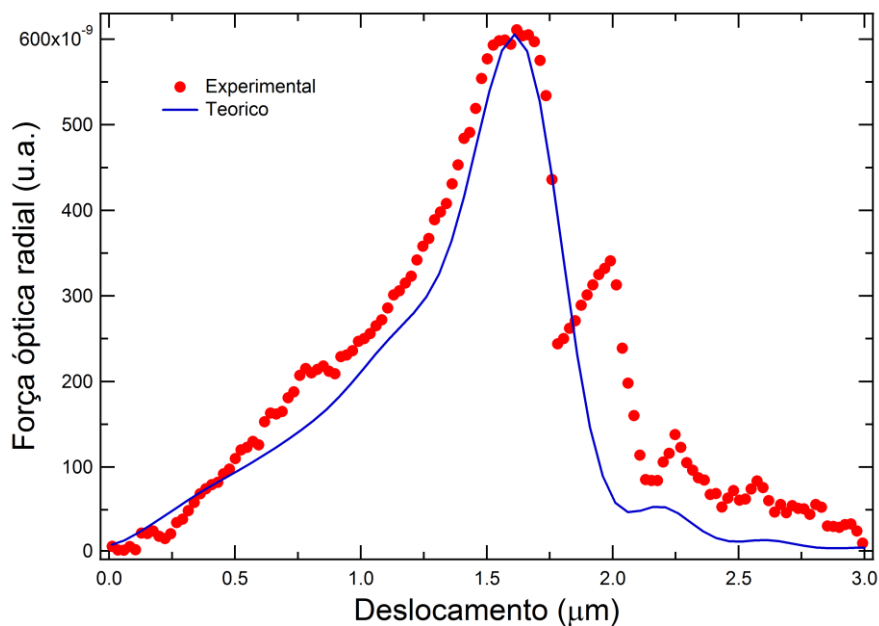


Figura 4.20 – Força radial paralela à polarização medida (pontos) comparados com a teoria para uma microesfera de poliestireno de 3 micros de diâmetro.

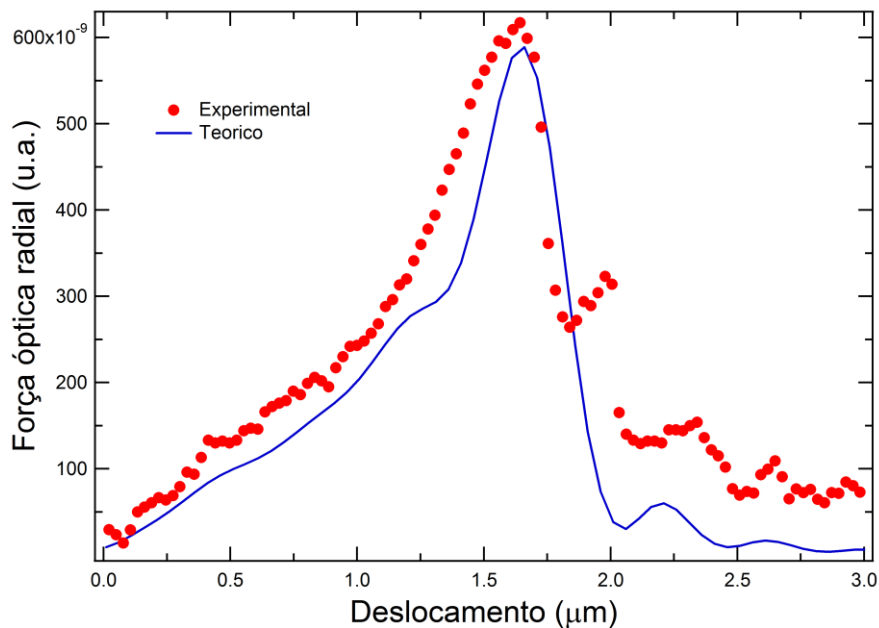


Figura 4.21 - Força radial perpendicular à polarização medida (pontos) comparados com a teoria para uma microesfera de poliestireno de 3 micros de diâmetro.

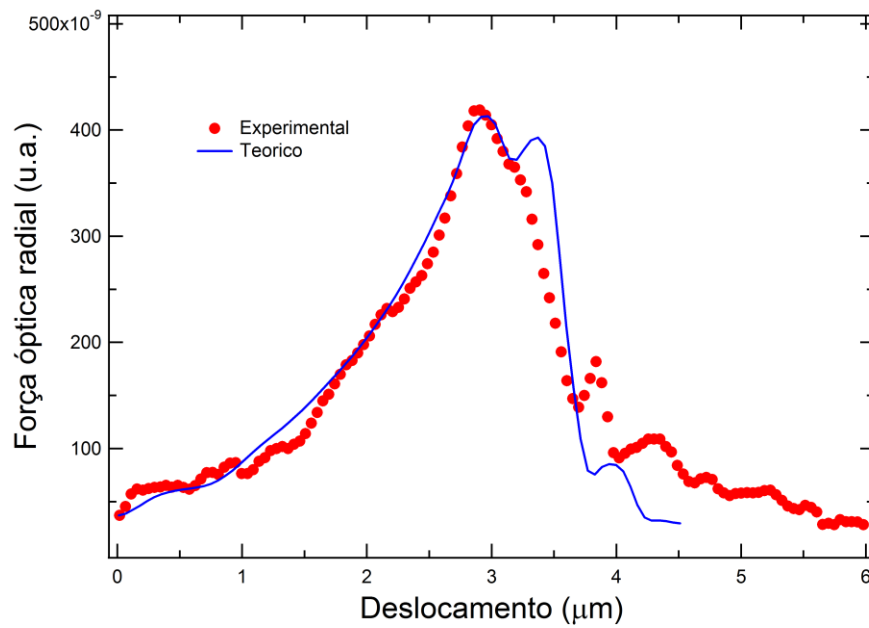


Figura 4.22 - Força radial paralela à polarização medida (pontos) comparados com a teoria para uma microesfera de poliestireno de 6 micros de diâmetro.

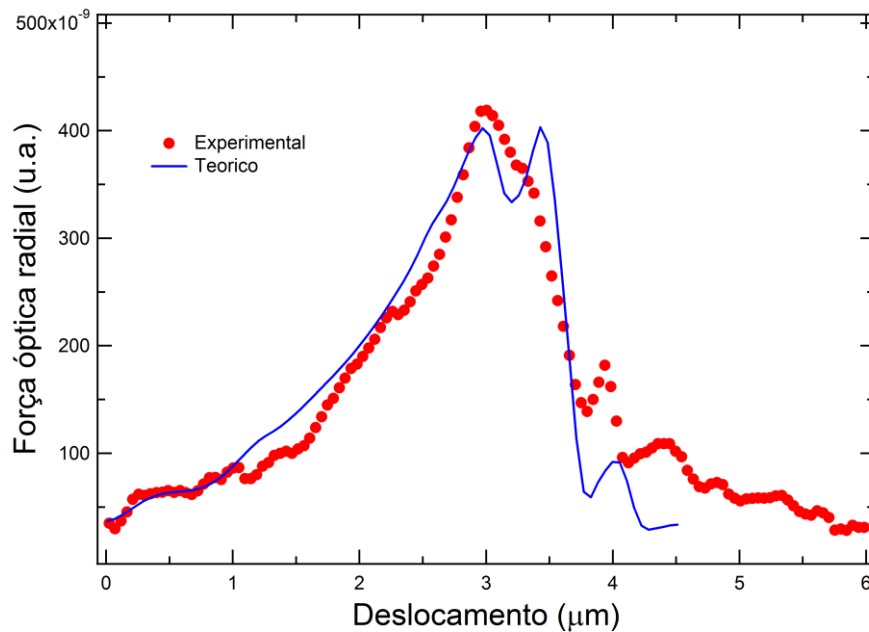
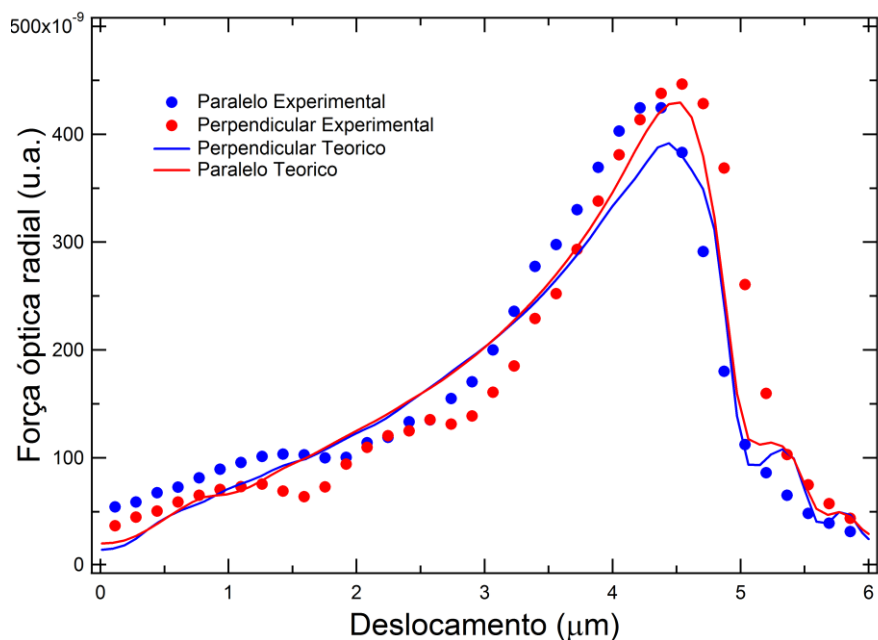
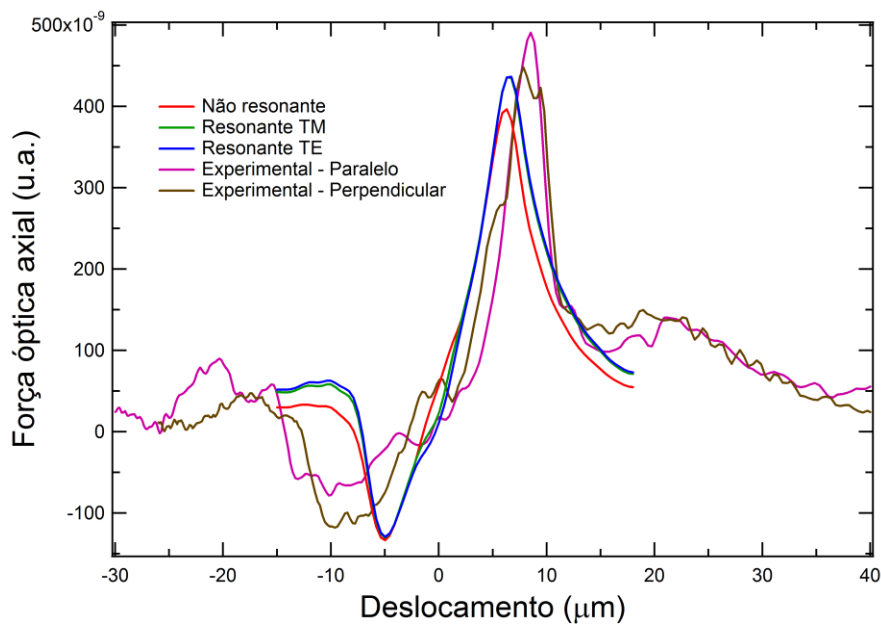


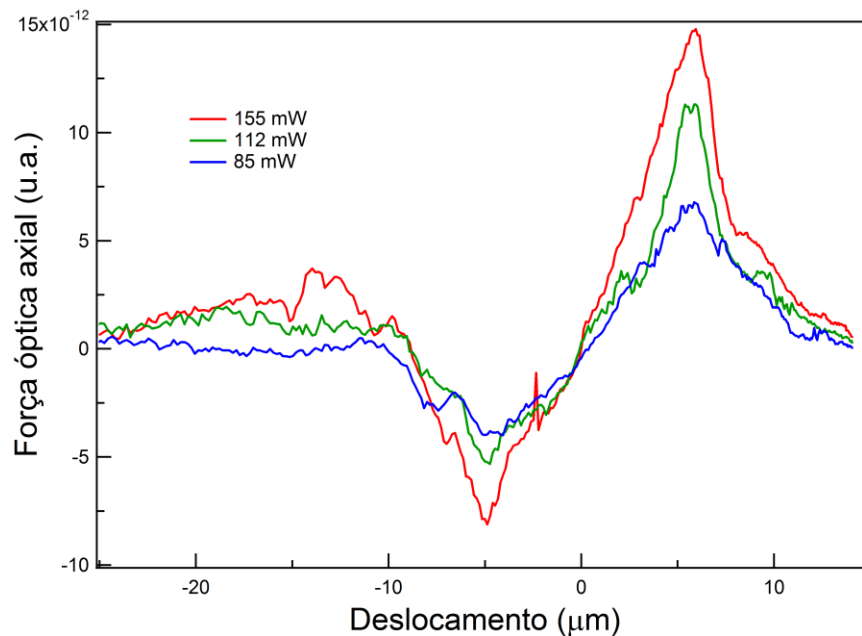
Figura 4.23 - Força radial perpendicular a polarização medida (pontos) comparados com a teoria para uma microesfera de poliestireno de 6 micros de diâmetro.



**Figura 4.24 - Força radial medida (pontos) comparados com a teoria para uma microesfera de poliestireno de 9 micros de diâmetro.**



**Figura 4.25 - Força axial comparados com a teoria ( $f_0=1.77$ ) para uma microesfera de poliestireno de 9 micros de diâmetro.**



**Figura 4.26 - Força axial experimental para diferentes potências.**

Os resultados teóricos apresentam concordância com os experimentais. As diferenças de posição são devidas principalmente aos parâmetros utilizados na simulação que não corresponde a situação experimental. Além do deslocamento focal que afeta fortemente as medidas axiais. Seria interessante poder medir a largura do feixe exato na entrada da objetiva e saber a distancia focal exata da própria objetiva.



# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

*In science, self-satisfaction is death. Personal self-satisfaction is the death of the scientist. Collective self-satisfaction is the death of the research. It is restlessness, anxiety, dissatisfaction, agony of mind that nourish science".*  
*Jacques Lucien Monod (1910-1976)*

Este trabalho de tese estudou os aspectos teóricos e experimentais de um sistema de pinça óptica. Contribuindo para as futuras pesquisas teórica/experimental do grupo. O sistema experimental que permite a captura e controle tanto na posição axial como radial, e portanto a obtenção de toda uma curva de força, nos permitiu dar um passo a frente e começar a validar modelos para a descrição da força óptica em micro-esfera. Dentre estes modelos destaca-se a união da Representação do Espectro Angular com a Teoria Generalizada de Lorenz-Mie. Com o auxílio da Integral que até onde sabemos não consta nos Handbooks convencionais permitiu a solução de um problema que há várias décadas vem sendo

contornado com novos métodos e aproximações. Podemos agora descrever o campo EM em uma localização arbitrária perto da região focal de uma objetiva de abertura numérica arbitrária, levando em conta a difração. Conhecendo o campo EM podemos descrever os multipolos da expansão de um feixe arbitrário tratando o problema eletromagnético completo sem considerar nenhum limite, como a óptica geométrica ou Rayleigh. Não somente as técnicas de pinça óptica mas quaisquer outros experimentos que envolvam um laser e uma objetiva, onde deseja-se estudar a interação da luz com a matéria serão beneficiados com uma descrição do campo em termos de multipolos na região focal.

Da parte experimental a possibilidade de excitar os modos de ressonância de uma microsefera pela pinça, abre a possibilidade de estudos de propriedades não lineares em microesferas de vidro (ou outro material) desde que possuam fator de qualidade suficientemente alta para prover comprimentos de interações suficientes para reduzir o limiar dos processos não-lineares significativamente. O fato do MDR ser fortemente dependente da mínima variação do fator de tamanho, permitiria explorar esta propriedade para utilização de um sensor, de concentração química, por exemplo. A vantagem da pinça neste estudo é de poder tratar o MDR em um esfera sem interfaces vizinhas que induziriam uma perda no fator de qualidade.

A grande dificuldade de toda esta tese foi realmente a parte experimental. O sistema experimental funcionou, mas há melhorias que ainda podem ser realizadas. Dos problemas que surgiram e que podem ser resolvidos, algumas soluções podem ser aplicadas para uma melhoria futura. Flutuações na potência do laser devido ao espalhamento de partículas poderiam ser reduzidas, transferindo-se a montagem da pinça para mais perto da saída do laser. Flutuações também ocorreram devido as vibrações mecânicas e acústicas, com o microscópio agindo como uma antena e retransmitindo para a Óptica do microscópio e plataforma de amostra e desta forma perdendo muitas vezes a partícula da armadilha. A contaminação também foi um sério problema pois para as medidas que são demoradas, as bactérias presente no em torno acabam entrando na câmera de Neubauer. As bactérias acabam fixando-se sobre a esfera de poliestireno ou se extinguindo na região focal do laser.



# Apêndice A

## Relações Matemáticas

Neste apêndice iremos apresentar uma série de relações matemáticas utilizadas na tese.

### A.1 Harmônico Esférico

Definição:

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (\text{A.1})$$

Ortogonalidade:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{nm}(\theta, \phi) Y_{n'm'}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} . \quad (\text{A.2})$$

Propriedades:

$$Y_{n,-m} = (-1)^m Y_{nm}^* , \quad (\text{A.3})$$

$$Y_{nm}^*(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{|m|-m}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{-im\phi} , \quad (\text{A.4})$$

$$L^2 Y_{nm} = n(n+1) Y_{nm} , \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} L_\pm Y_{nm} &= \sqrt{(n \mp m)(n \pm m + 1)} Y_{n,m \pm 1} . \\ L_z Y_{nm} &= m Y_{nm} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Funções de Bessel

Definição:

$$J_m(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(m+s+1)s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+m} . \quad (\text{A.7})$$

Função geradora:

$$e^{\frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x) . \quad (\text{A.8})$$

Propriedades:

$$J_{-m} = (-1)^m J_m , \quad (\text{A.9})$$

$$J_m(0) = \delta_{m,0}. \quad (\text{A.10})$$

Identities:

$$\frac{2m}{x} J_m(x) = J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x), \quad (\text{A.11})$$

$$2J'_m(x) = J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x), \quad (\text{A.12})$$

$$J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x), \quad (\text{A.13})$$

$$e^{ix \cos \gamma} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) e^{ip\gamma} i^p. \quad (\text{A.14})$$

Teorema da Multiplicação:

$$J_m(\lambda x) = \lambda^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k J_{m+k}(x). \quad (\text{A.15})$$

## A.3 Funções Esféricas de Bessel

Definição:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z), \quad (\text{A.16})$$

$$y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+1/2}(z), \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(z) &= j_n(z) + iy_n(z) \\ h_n^{(2)}(z) &= j_n(z) - iy_n(z) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Expansão assintótica:

$$j_n(kr) = \frac{e^{i(kr-n\pi/2)} - e^{-i(kr-n\pi/2)}}{2ikr} = (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{2kr} + (i)^{n+1} \frac{e^{-ikr}}{2kr}, \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(kr) &\sim \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr} \\ h_n^{(2)}(kr) &\sim -\frac{i^n e^{-ikr}}{ikr} \end{aligned} \quad kr \gg n^2. \quad (\text{A.20})$$

Identities:

$$\frac{(2n+1)}{x} j'_n(x) = j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x), \quad (\text{A.21})$$

$$(2n+1)j'_n(x) = nj_{n-1}(x) - (n+1)j_{n+1}(x), \quad (\text{A.22})$$

$$j'_n(x) = \frac{n}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x). \quad (\text{A.23})$$

## A.4 Polinômios de Legendre

Definição:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{A.24})$$

Identities:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad (\text{A.25})$$

$$(1-x^2)P'_n(x) = -n x P_n(x) + (n+1) P_{n-1}(x). \quad (\text{A.26})$$

## A.5 Funções de Legendre Associado

Definição:

$$P_n^m(x) = (-1)^n (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} P_n(x). \quad (\text{A.27})$$

Identities:

$$P_{n+1}^m(x) = \frac{2n+1}{n-m+1} x P_n^m(x) - \frac{n+m}{n-m+1} P_{n-1}^m(x), \quad (\text{A.28})$$

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x), \quad (\text{A.29})$$

$$P_n^{|m|}(0) = i^{n+|m|} \frac{(n+|m|-1)!!}{(n-|m|)!!} \quad \text{para } n+m = \text{par}, \quad (\text{A.30})$$

$$\sin^2 \alpha P_n^m(\cos \alpha) = m \cos \alpha P_n^m(\cos \alpha) + (n+m)(n-m+1) \sin \alpha P_n^{m-1}(\cos \alpha). \quad (\text{A.31})$$

## A.6 Integrais

Integral Nova:

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta P_n^m(\cos \theta) e^{iR \cos \alpha \cos \theta} J_m(R \sin \alpha \sin \theta) = 2i^{n-m} P_n^m(\cos \alpha) j_n(R). \quad (\text{A.32})$$

Integral da generalização de Gegenbauer:

$$j_n(x) = \frac{1}{2} (-i)^n \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.33})$$

Integral de Fresnel:

$$\int_0^{\infty} e^{iau^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{\pm i\pi/4}. \quad (\text{A.34})$$

Integral no ângulo azimutal  $\phi$ :

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm i x \cos(\phi-\beta)} \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-im\phi} = -\pi (\pm i)^m e^{-im\beta} \begin{Bmatrix} i J_{m-1}(x) e^{i\beta} - i J_{m+1}(x) e^{-i\beta} \\ J_{m-1}(x) e^{i\beta} + J_{m+1}(x) e^{-i\beta} \\ -2J_m(x) \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

Prova:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi e^{\pm i x \cos(\phi-\beta)} \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-im\phi} &= \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) e^{ip(\phi-\beta)} (\pm i)^p \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-im\phi} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) e^{-ip\beta} (\pm i)^p \int_0^{2\pi} d\phi \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 1 \end{Bmatrix} e^{i\phi(p-m)} \\ &= \pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) e^{-ip\beta} (\pm i)^p \begin{Bmatrix} \delta_{p,m-1} + \delta_{p,m+1} \\ -i\delta_{p,m-1} + i\delta_{p,m+1} \\ 2\delta_{p,m} \end{Bmatrix} \\ &= -\pi (\pm i)^m e^{-im\beta} \begin{Bmatrix} i J_{m-1}(x) e^{i\beta} - i J_{m+1}(x) e^{-i\beta} \\ J_{m-1}(x) e^{i\beta} + J_{m+1}(x) e^{-i\beta} \\ 2J_m(x) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

# Apêndice B

## Lente Aplanética

Uma lente ou sistema óptico aplanético obedece duas regras, à condição seno de Abbe e à conservação de energia. Os campos na vizinhança de uma lente podem ser formulados pelas regras de óptica geométrica. Nesta aproximação a finitude do comprimento de onda é desprezado ( $k \rightarrow \infty$ ) e a energia é transportada ao longo dos raios.

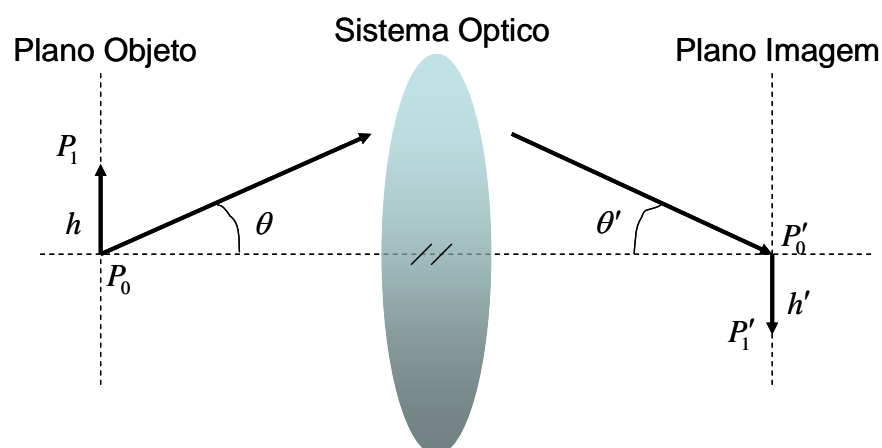


Figura B.1 – Ilustração da condição seno de Abbe

Para um sistema óptico consideram-se os planos imagem e objeto perpendiculares ao eixo óptico, onde  $\theta$  é o ângulo relativo ao eixo óptico por um feixe de um ponto axial do objeto no espaço objeto de índice  $n$ . Já  $\theta'$  é o ângulo no espaço imagem de índice  $n'$ , então a magnificação transversal  $m$ , é dada por,

$$m = \frac{h}{h'} = \frac{n \sin \theta}{n' \sin \theta'}, \quad (\text{B.1})$$

para todos os ângulos  $\theta$  e  $\theta'$ . Para um objeto no infinito teríamos,

$$\sin \theta' = -\frac{h}{f'}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $h$  é a altura do feixe paralelo ao eixo e  $f'$  é o *back focal plane*. Logo a condição seno nos fornece a informação de como um feixe refrata por um elemento aplanético. A condição seno nos diz que cada feixe que sai ou converge para o foco do sistema aplanético, intercepta o seu feixe conjugado na esfera de raio  $f'$  (esfera gaussiana de referência).

Vamos considerar que as perdas de energia por reflexão e absorção do sistema sejam desprezíveis, tal que a distribuição angular da amplitude  $A(\theta)$  dependa somente da densidade de raios. Como vimos os feixes convergem para o foco a partir de uma esfera de referência de raio  $f'$ , subentendida em um ângulo sólido dado pela abertura numérica. Portanto de acordo com a conservação de energia, o fluxo ao longo de cada raio deve permanecer constante. Sabemos que a potência transportada por um feixe é,

$$P = \frac{1}{2Z} |E|^2 dA, \quad (\text{B.3})$$

onde  $Z$  é a impedância do meio e  $dA$  um elemento de área infinitesimal perpendicular à propagação do raio. Portanto como indicado na Figura 2.10 os campos antes e depois da refração devem satisfazer,

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_0| \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}} \sqrt{\cos \theta}. \quad (\text{B.4})$$



# Apêndice C

## Programas Numéricos

Neste apêndice iremos apresentar uma descrição das avaliações numéricas da teoria utilizando o programa Mathematica versão 5.2. Versões atualizada dos programas podem ser encontradas na pagina pessoal, <http://aneves.googlepages.com>

### C.1 Validação dos Campos Radiais

O primeiro passo agora é de definir as funções trigonométricas que descrevem um ponto de observação do sistema de coordenadas do feixe, para o sistema de coordenadas do centro da esfera. Utilizamos as seguintes relações,

$$\begin{aligned}
\rho_f &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\
z_f &= z - z_0 \\
\phi_f &= \text{tg}^{-1} \left( \frac{y-y_0}{x-x_0} \right)
\end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
\text{sen } \theta \cos \phi &= x / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\text{sen } \theta \text{ sen } \phi &= y / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} , \\
\cos \theta &= z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

onde as coordenadas com subscrito  $f$  representam as coordenadas do feixe, aqueles com o subscrito 0 a distância entre o feixe e o centro da esfera, e a coordenada sem subscrito é o ponto de observação. Com estas e as equações, (2.193) e (2.194), podemos escrever,

$$\hat{r} \cdot \vec{E}^{(x)}(x, y, z) = \frac{ikf}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} E_0 e^{-ikf} [I_0(\rho_f, z_f)x + I_2(\rho_f, z_f)(x \cos 2\phi_f + y \text{sen} 2\phi_f) - 2iI_1(\rho_f, z_f)z \cos \phi_f] \tag{C.3}$$

$$\hat{r} \cdot \vec{H}^{(x)}(x, y, z) = \frac{ikf}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} H_0 e^{-ikf} [I_0(\rho_f, z_f)y + I_2(\rho_f, z_f)(x \text{sen} 2\phi_f - y \cos 2\phi_f) - 2iI_1(\rho_f, z_f)z \text{sen} \phi_f] \tag{C.4}$$

O segundo passo é calcular a componente radial dos campos teórico pelo REA e pelo Método Exato para testar os multipolos. Para isto procedemos da definição do campo incidente (2.72), para obter as componentes radiais,

$$\begin{aligned}
\hat{r} \cdot \vec{E}_{inc} &= -E_0 \sum_{n,m} \frac{j_n(kr)}{kr} G_{nm}^{TM} \sqrt{n(n+1)} Y_{nm}\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \\
&= -E_0 \sum_{n,m} i^{n+m} \frac{j_n(kr)}{kr} G_{nm}^{TM} \sqrt{n(n+1)} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{(n+|m|-1)!!}{(n-|m|-1)!!}} e^{im\phi} \\
\hat{r} \cdot \vec{H}_{inc} &= H_0 \sum_{n,m} \frac{j_n(kr)}{kr} G_{nm}^{TE} \sqrt{n(n+1)} Y_{nm}\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \\
&= H_0 \sum_{n,m} i^{n+m} \frac{j_n(kr)}{kr} G_{nm}^{TE} \sqrt{n(n+1)} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{(n+|m|-1)!!}{(n-|m|-1)!!}} e^{im\phi}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

esta somatória agora é realizada somente sobre  $n+m$  par, pois utilizamos a relação,

$$P_n^{|m|}(0) = i^{n+|m|} \frac{(n+|m|-1)!!}{(n-|m|)!!} \quad \text{para } n+m = \text{par} . \tag{C.6}$$

Este campo é calculado para cada ponto de um *grid*, que representa um espaço bi-dimensional. Por último determinamos os coeficientes de forma do feixe,  $G_{nm}^{TM}$  e  $G_{nm}^{TE}$  para os feixes do método exato, equações (2.240) e (2.241),

$$\begin{aligned}
G_{nm}^{TM} &= -4\pi(i)^{|m|-m} i^{n-m} ikf e^{-ikf} e^{-im\phi_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} , \\
&\quad \left( I_1^E(n, m) \cos \phi_0 + im I_2^E(n, m) \sin \phi_0 \right)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
G_{nm}^{TE} &= 4\pi(i)^{|m|-m} i^{n-m} ikf e^{-ikf} e^{-im\phi_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} . \\
&\quad \left( I_1^E(n, m) \sin \phi_0 - im I_2^E(n, m) \cos \phi_0 \right)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Substituindo estes coeficientes na equação (C.5),

$$\begin{aligned}
\vec{E}_r^E &= E_0 \sum_{n,m} (-1)^n (i)^{|m|-m} \frac{j_n(kr)}{kr} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} (2n+1) \frac{(n-|m|-1)!!}{(n+|m|)!!} e^{im(\phi-\phi_0)} , \\
&\quad \left( I_1^E(n, m) \cos \phi_0 + im I_2^E(n, m) \sin \phi_0 \right)
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_r^E = H_0 \sum_{n,m} (-1)^n (i)^{|m|-m} \frac{j_n(kr)}{kr} ikf e^{-ikf} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} (2n+1) \frac{(n-|m|-1)!!}{(n+|m|)!!} e^{im(\phi-\phi_0)} \\ (I_1^E(n,m) \sin \phi_0 - im I_2^E(n,m) \cos \phi_0) \end{aligned} \quad (C.10)$$

As integrais devem ser avaliadas numericamente para cada ponto do grid. Em termos numéricos essas integrais são calculadas mais rapidamente se fizermos a mudança da variável de integração ( $\chi = \cos \alpha$ ), desta forma obtemos,

$$I_0(\rho, z) = \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 \sqrt{\chi} (1+\chi) e^{-\frac{f^2(1-\chi^2)}{\omega_a^2}} e^{ikz\chi} J_0(k\rho\sqrt{1-\chi^2}) d\chi, \quad (C.11)$$

$$I_1(\rho, z) = \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 \sqrt{\chi(1-\chi^2)} e^{-\frac{f^2(1-\chi^2)}{\omega_a^2}} e^{ikz\chi} J_1(k\rho\sqrt{1-\chi^2}) d\chi, \quad (C.12)$$

$$I_2(\rho, z) = \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 \sqrt{\chi} (1-\chi) e^{-\frac{f^2(1-\chi^2)}{\omega_a^2}} e^{ikz\chi} J_2(k\rho\sqrt{1-\chi^2}) d\chi. \quad (C.13)$$

Em termos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_o$ ,  $(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z') = (x - x_o, y - y_o, z - z_o)$  de onde

$$\text{obtemos} \quad z_f = z - z_o, \quad \rho_f = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}, \quad \cos \varphi_f = \frac{x - x_o}{\rho_f}, \quad \sin \varphi_f = \frac{y - y_o}{\rho_f},$$

$$\sin 2\varphi_f = 2 \sin \varphi_f \cos \varphi_f = \frac{2(x - x_o)(y - y_o)}{\rho_f^2} \quad \text{e} \quad \cos 2\varphi_f = \cos^2 \varphi_f - \sin^2 \varphi_f = \frac{(x - x_o)^2 - (y - y_o)^2}{\rho_f^2}$$

As integrais dos coeficientes de forma do feixe ficam,

$$\begin{aligned} I_1^E(n, m) = \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 d\chi \sqrt{\frac{\chi}{1-\chi^2}} e^{-f^2(1-\chi^2)/\omega_b^2} e^{-ikz_o\chi} \\ \left( m \frac{J_m(k\rho_0\sqrt{1-\chi^2})}{k\rho_0\sqrt{1-\chi^2}} \left[ (m-|m|\chi) P_n^{|m|}(\chi) - (n+|m|)(n-|m|+1)\sqrt{1-\chi^2} P_n^{|m|-1}(\chi) \right], (C.14) \right. \\ \left. + J_{m+1}(k\rho_0\sqrt{1-\chi^2}) \left[ |m|\chi P_n^{|m|}(\chi) + (n+|m|)(n-|m|+1)\sqrt{1-\chi^2} P_n^{|m|-1}(\chi) \right] \right) \end{aligned}$$

$$I_2^E(n, m) = \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 d\chi \sqrt{\chi} e^{-f^2(1-\chi^2)/\omega_0^2} e^{-ikz_0\chi} \left( \frac{J_m(k\rho_0\sqrt{1-\chi^2})}{k\rho_0\sqrt{1-\chi^2}} \left[ (m-|m|\chi)P_n^{|m|}(\chi) - (n+|m|)(n-|m|+1)\sqrt{1-\chi^2} P_n^{|m|-1}(\chi) \right] - J_{m+1}(k\rho_0\sqrt{1-\chi^2})P_n^{|m|}(\chi) \right) \quad (\text{C.15})$$

Onde utilizamos as propriedades (A.13) e (A.31). Desta forma temos as expressões utilizadas no Mathematica na seção seguinte.

## C.2 Programa Validação Exato.nb

```
(*Validação para feixes Gaussiano em μ - esferas*)
(*by Antonio A . R . Neves*)
(*Versão 13/1/2006*)
(*Instruções:Para executar clique em:
Kernel -> Evaluation -> Evaluate Notebook*)

(*Inicializações*)
Clear["Global`*"];
Off[General::spell];
Off[General::spell1];
SetDirectory["C:\\"];

(*Variáveis*)
(* Obs.:Todos os valores de dimensões estão em microns e os angulos em
radianos.*)
λ = 0.8;
xo = 0.00001;
yo = 0.00001;
zo = 0.;
kpo = k*Sqrt[xo^2 + yo^2];
kzo = k*zo;
```

```

φ0 = ArcTan[x0, y0];
Cosfio = Cos[φ0];
Sinfio = Sin[φ0];
NA = 1.25;
f = 1700;
ωb = 2500;
Nmin = 1;
Nmax = 30;
nv = -(4.25016/(10^3*λ^4)) + 1.4883 + 1.9023/(10^2*λ^2);
na = 3.779/(10^5*λ^4) + 1.3253 + 2.7553/(10^3*λ^2);
np = 3.4779/(10^4*λ^4) + 1.5725 + 3.108/(10^3*λ^2);
k = (2*Pi*na)/λ;
n0n1 = 1/Sqrt[nv];
αmax = ArcSin[NA/na];
kf = k*f;
fω = f/ωb;
fo = 1/(fω*Sin[αmax]);
Xini = -4.5;
Xfin = 4.5;
cosmax = Cos[αmax];

(*Definições de Funções*)
I1[n_, m_] := NIntegrate[ (Sqrt[χ]*(m*LegendreP[n, m, χ]* ((χ*BesselJ[m +
1, kpo*Sqrt[1 - χ^2]])/Sqrt[1 - χ^2] + (m*BesselJ[m, kpo*Sqrt[1 -
χ^2]])/(kpo*(χ + 1))) - (m + n)*(-m + n + 1)*LegendreP[n, m - 1, χ]*
((m*BesselJ[m, kpo*Sqrt[1 - χ^2]])/(kpo*Sqrt[1 - χ^2]) - BesselJ[m + 1,
kpo*Sqrt[1 - χ^2]])))/(E^(fω^2*(1 - χ^2))* E^(I*k*χ*zo)), *) , AccuracyGoal
-> 6, Compiled -> False];
I0[n_] := -NIntegrate[(Sqrt[χ]*BesselJ[1, kpo*Sqrt[1 - χ^2]]* LegendreP[n,
1, χ])/(E^(fω^2*(1 - χ^2))*E^(I*k*χ*zo)), {χ, Cos[αmax], 1}, AccuracyGoal -
> 6, Compiled -> False];
I2[n_, m_] := NIntegrate[ (Sqrt[χ]*(LegendreP[n, m, χ]*((m*BesselJ[m,
kpo*Sqrt[1 - χ^2]])/ (kpo*(χ + 1)) - BesselJ[m + 1, kpo*Sqrt[1 - χ^2]]/
Sqrt[1 - χ^2]) - ((m + n)*(-m + n + 1)*LegendreP[n, m - 1, χ]* BesselJ[m,
kpo*Sqrt[1 - χ^2]])/(kpo*Sqrt[1 - χ^2])))/(E^(fω^2*(1 -
χ^2))*E^(I*k*χ*zo)), {χ, Cos[αmax], 1}, AccuracyGoal -> 6, Compiled ->
False];

```

```

(*Cálculos*)
MCos[n_, x_, y_] := Cos[Range[-n, n]*(ArcTan[x, y] -  $\varphi_0$ )];
MSin[n_, x_, y_] := Sin[Range[-n, n]*(ArcTan[x, y] -  $\varphi_0$ )];
MI1 = Table[If[EvenQ[m + n], ((-m + n - 1)!!*I1[n, m])/(m + n)!!, 0.], {n,
Nmin, Nmax}, {m, -n, n}];
MI2 = Table[If[EvenQ[m + n], (m*(-m + n - 1)!!*I2[n, m])/(m + n)!!, 0.],
{n, Nmin, Nmax}, {m, -n, n}];
ME[n_, x_, y_] := Cosfio*MI1[[n - Nmin + 1]] . MCos[n, x, y] -
Sinfio*MI2[[n - Nmin + 1]] . MSin[n, x, y];
MRadial[x_, y_] := Table[(-1)^n*(2*n + 1)*BesselJ[n + 0.5, k*Sqrt[x^2 +
y^2]], {n, Nmin, Nmax}];
MH[n_, x_, y_] := Sinfio*MI1[[n - Nmin + 1]] . MCos[n, x, y] +
Cosfio*MI2[[n - Nmin + 1]] . MSin[n, x, y];
MRadial[x_, y_] := Table[(-1)^n*(2*n + 1)*BesselJ[n + 0.5, k*Sqrt[x^2 +
y^2]], {n, Nmin, Nmax}];
SetAttributes[ME, Listable];
SetAttributes[MH, Listable];
ErEXATO[x_, y_] := (I*kf*n0n1*Sqrt[Pi/2]*MRadial[x, y] . ME[Range[Nmin,
Nmax], x, y])/(E^(I*kf)*Sqrt[k^3*(x^2 + y^2)^(3/2)]);
HrEXATO[x_, y_] := (kf*n0n1*Sqrt[Pi/2]*MRadial[x, y] . MH[Range[Nmin,
Nmax], x, y])/(E^(I*kf)*Sqrt[k^3*(x^2 + y^2)^(3/2)]);

(*Gráficos*)
GraficoEXATO=Plot3D[Abs[ErEXATO(x,y)],{x,Xini,Xfin},{y,Xini,Xfin},PlotPoint
s->200,Axes->{True,True,True},TextStyle->{FontFamily->"Arial",FontSize-
>16},Boxed->False,Mesh->False,ImageSize->600,PlotRange->All,AxesLabel-
>{"x","y","|E_r|"},DisplayFunction->Identity];
GraficoEXATO1=Plot3D[Abs[HrEXATO(x,y)],{x,Xini,Xfin},{y,Xini,Xfin},PlotPoin
ts->200,Axes->{True,True,True},TextStyle->{FontFamily->"Arial",FontSize-
>16},Boxed->False,Mesh->False,ImageSize->600,PlotRange->All,AxesLabel-
>{"x","y","|H_r|"},DisplayFunction->Identity];

(*Salvar Dados*)
arquivo = StringJoin["Exato_E_fo", ToString[NumberForm[fo, 3]], "_xo",
ToString[xo], "_yo", ToString[y], "_zo", ToString[zo]];
Export[StringJoin[arquivo, "_t.tif"], GraficoEXATO, "TIFF", ImageResolution
-> 150];

```

```
arquivol = StringJoin["Exato_H_fo", ToString[NumberForm[fo, 3]], "_xo",
ToString[xo], "_yo", ToString[yo], "_zo", ToString[zo]];
Export[StringJoin[arquivol, "_tif"], GraficoEXAT01, "TIFF",
ImageResolution -> 150];
```

## C.3 Programa Validação REA.nb

```
(*Validação REA para feixes Gaussiano em  $\mu$  - esferas*)
(*by Antonio A . R . Neves*)
(*Versão 13/1/2006*)
(*Instruções:Para executar clique em:
Kernel -> Evaluation -> Evaluate Notebook*)

(*Inicializações*)
Clear["Global`*"];
Off[General::spell];
Off[General::spell1];
SetDirectory["C:\\"];

(*Variáveis*)
(* Todos os valores de dimensões estão em microns e os angulos em
radianos.*)
 $\lambda$  = 0.8;
xo = 1.5;
yo = 1.5;
zo = 0;
kpo = k*Sqrt[xo^2 + yo^2];
kzo = k*zo;
 $\varphi_0$  = ArcTan[xo, yo];
Cosfio = Cos[ $\varphi_0$ ];
Sinfio = Sin[ $\varphi_0$ ];
NA = 1.25;
f = 1700;
```



```

ωb = 2500;
Nmin = 1;
Nmax = 30;
nv = -(4.25016/(10^3*λ^4)) + 1.4883 + 1.9023/(10^2*λ^2);
na = 3.779/(10^5*λ^4) + 1.3253 + 2.7553/(10^3*λ^2);
np = 3.4779/(10^4*λ^4) + 1.5725 + 3.108/(10^3*λ^2);
k = (2*Pi*na)/λ;
n0n1 = 1/Sqrt[nv];
αmax = ArcSin[NA/na];
kf = k*f;
fω = (f*10)/ωb;
fo = 1/(fω*Sin[αmax]);
Xini = -4.5;
Xfin = 4.5;

(*Definições*de*Funções*)
RI0[x_, y_, z_] := NIntegrate[(Sqrt[χ]*(χ + 1)* BesselJ[0, k*Sqrt[(1 -
χ^2)*((x - xo)^2 + (y - yo)^2)])]/ (E^(fω^2*(1 - χ^2))*E^(I*k*χ*zo)), {χ,
Cos[αmax], 1}, AccuracyGoal -> 6, Compiled -> False];
RI0[x_, y_, z_] /; xo == x && yo == y := NIntegrate[(Sqrt[χ]*(χ +
1))/(E^(fω^2*(1 - χ^2))*E^(I*k*χ*zo)), {χ, Cos[αmax], 1}, AccuracyGoal ->
6, Compiled -> False];
RI1[x_, y_, z_] := NIntegrate[(Sqrt[χ*(1 - χ^2)]* BesselJ[1, k*Sqrt[(1 -
χ^2)*((x - xo)^2 + (y - yo)^2)])]/ (E^(fω^2*(1 - χ^2))*E^(I*k*χ*zo)), {χ,
Cos[αmax], 1}, AccuracyGoal -> 6, Compiled -> False];
RI1[x_, y_, z_] /; xo == x && yo == y := 0;
RI2[x_, y_, z_] := NIntegrate[(Sqrt[χ]*(1 - χ)* BesselJ[2, k*Sqrt[(1 -
χ^2)*((x - xo)^2 + (y - yo)^2)])]/ (E^(fω^2*(1 - χ^2))*E^(I*k*χ*zo)), {χ,
Cos[αmax], 1}, AccuracyGoal -> 6, Compiled -> False];
RI2[x_, y_, z_] /; xo == x && yo == y := 0;
ErREA[x_, y_] := (I*kf*n0n1*(x*RI0[x, y, 0] + ((x*((x - xo)^2 - (y - yo)^2)
+ 2*(x - xo)*y*(y - yo))*RI2[x, y, 0])/ ((x - xo)^2 + (y -
yo)^2)))/(E^(I*kf)*(2*Sqrt[x^2 + y^2]));
ErREA[x_, y_] /; x == 0 && y == 0 := 0;
ErREA[x_, y_] /; xo == x && yo == y := (I*kf*n0n1*x*RI0[x, y, 0])/
(E^(I*kf)*(2*Sqrt[x^2 + y^2]));

```

```

HrREA[x_, y_] := (I*kf*n0n1*(y*RI0[x, y, 0] + ((2*x*(x - xo)*(y - yo) -
y*((x - xo)^2 - (y - yo)^2))*RI2[x, y, 0])/ ((x - xo)^2 + (y -
yo)^2)))/(E^(I*kf)*(2*Sqrt[x^2 + y^2]));
HrREA[x_, y_] /; x == 0 && y == 0 := 0;
HrREA[x_, y_] /; xo == x && yo == y := (I*kf*n0n1*y*RI0[x, y, 0])/
(E^(I*kf)*(2*Sqrt[x^2 + y^2]));

(*Gráficos*)
GraficoREA = Plot3D[Abs[ErREA[x, y]], {x, Xini, Xfin}, {y, Yini, Yfin},
PlotPoints -> 200, Axes -> {True, True, True}, TextStyle -> {FontFamily ->
"Arial", FontSize -> 16}, Boxed -> False, Mesh -> False, ImageSize -> 800,
PlotRange -> All, AxesLabel -> {"x", "y", "|Er|"}, DisplayFunction ->
Identity];
GraficoREA1 = Plot3D[Abs[HrREA[x, y]], {x, Xini, Xfin}, {y, Yini, Yfin},
PlotPoints -> 200, Axes -> {True, True, True}, TextStyle -> {FontFamily ->
"Arial", FontSize -> 16}, Boxed -> False, Mesh -> False, ImageSize -> 800,
PlotRange -> All, AxesLabel -> {"x", "y", "|Hr|"}, DisplayFunction ->
Identity];

(*Salvar Dados*)
arquivo = StringJoin["REA_E_fo", ToString[NumberForm[fo, 3]], "_xo",
ToString[xo], "_yo", ToString[yo], "_zo", ToString[zo]];
Export[StringJoin[arquivo, "_tif"], GraficoREA, "TIFF", ImageResolution ->
150];
arquivo1 = StringJoin["REA_H_fo", ToString[NumberForm[fo, 3]], "_xo",
ToString[xo], "_yo", ToString[yo], "_zo", ToString[zo]];
Export[StringJoin[arquivo1, "_tif"], GraficoREA1, "TIFF", ImageResolution
-> 150];

```

## C.4 Forças Radiais

Para simular o resultado teórico das forças radiais utilizamos a expressão (2.136). Os coeficientes de forma do feixe são dados pelas equações, (2.240), (2.241), (2.242) e (2.243), onde simplificamos a derivada da função de Bessel como,

$$J_m'(x) = m \frac{J_m(x)}{x} - J_{m+1}(x) \quad (\text{C.16})$$

e fizemos uma mudança de variável de  $\cos \alpha \rightarrow x$ , desta forma as expressões utilizadas no programa que esta na seção 2.4 para uma polarização paralela ao movimento,

$$\begin{aligned} g_{nm}^{TM}(x_0) = & Z_n^m i k f e^{-ikf} X^{m+1} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} e^{-f^2/\omega_a^2} \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 dx \sqrt{x} e^{f^2 x^2/\omega_a^2} \\ & \left[ m^2 \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_m(k|x_0|\sqrt{1-x^2})}{krk|x_0|(1-x)} + x J_{m+1}(k|x_0|\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(kr\sqrt{1-x^2}) \right. \\ & \left. - m \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(k|x_0|\sqrt{1-x^2})}{kr} + \frac{J_m(k|x_0|\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(kr\sqrt{1-x^2})}{k|x_0|} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} g_{nm}^{TE}(x_0) = & -im Z_n^m i k f e^{-ikf} X^{m+1} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} e^{-f^2/\omega_a^2} \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 dx \sqrt{x} e^{f^2 x^2/\omega_a^2} \\ & \left[ m \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_m(k|x_0|\sqrt{1-x^2})}{krk|x_0|(1-x)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(k|x_0|\sqrt{1-x^2})}{kr} + x \frac{J_m(k|x_0|\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(kr\sqrt{1-x^2})}{k|x_0|} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Perpendicular ao movimento do feixe temos,

$$\begin{aligned}
g_{nm}^{TM}(y_0) = & -mZ_n^m ikf e^{-ikf} Y^{m+1} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} e^{-f^2/\omega_a^2} \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 dx \sqrt{x} e^{f^2 x^2/\omega_a^2} \\
& \left[ m \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_m(k|y_0|\sqrt{1-x^2})}{krk|y_0|(1-x)} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(k|y_0|\sqrt{1-x^2})}{kr} + x \frac{J_m(k|y_0|\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(kr\sqrt{1-x^2})}{k|y_0|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
g_{nm}^{TE}(y_0) = & iZ_n^m ikf e^{-ikf} Y^{m+1} \sqrt{\frac{n_0}{n_1}} e^{-f^2/\omega_a^2} \int_{\cos \alpha_{\max}}^1 dx \sqrt{x} e^{f^2 x^2/\omega_a^2} \\
& \left[ m^2 \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_m(k|y_0|\sqrt{1-x^2})}{krk|y_0|(1-x)} + x J_{m+1}(k|y_0|\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(kr\sqrt{1-x^2}) \right. \\
& \left. - m \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{J_m(kr\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(k|y_0|\sqrt{1-x^2})}{kr} + \frac{J_m(k|y_0|\sqrt{1-x^2}) J_{m+1}(kr\sqrt{1-x^2})}{k|y_0|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Com as particularidades descritas na seção. Segue agora o programa do Mathematica.

## C.5 Programa Forças Radiais.nb

```
(*Força Óptica Radial Exato em μ - esferas*)
(*by Antonio A . R . Neves*)
(*Versão 13/1/2006*)
(*Instruções:Para executar clique em:
Kernel -> Evaluation -> Evaluate Notebook*)

(*Inicializações*)
Clear["Global`*"];
Off[General::spell];
Off[General::spell1];
SetDirectory["C:\\"];

```

```

(*Variáveis*)
(* Todos os valores de dimensões estão em microns e os angulos em
radianos.*)
λ = 0.7944; NA = 1.25; f = 1700; ωb = 2500; d = 6;
nv = -(4.25016/(10^3*λ^4)) + 1.4883 + 1.9023/(10^2*λ^2);
na = 3.779/(10^5*λ^4) + 1.3253 + 2.7553/(10^3*λ^2);
nagua[λ_] := 3.779/(10^5*λ^4) + 1.3253 + 2.7553/(10^3*λ^2);
np = 3.4779/(10^4*λ^4) + 1.5725 + 3.108/(10^3*λ^2);
k = (2*Pi*na)/λ;
αmax = ArcSin[NA/na];
kf = k*f; fw = f/ωb; fo = 1/(fw*Sin[αmax]); η = np/na; n0n1 = 1/Sqrt[nv];
χ = (Pi*d*na)/λ; Nmax = IntegerPart[χ] + 5;
Xini = 0.01; Xinc = 0.15; Xfin = 4.53; X = 1;
cosmax = Cos[αmax]; GridX = Range[Xini, Xfin, Xinc]; GridN = Range[Nmax];
GridN1 = Range[Nmax + 1];
GridXN = Table[{n, m, xx}, {n, 1, Nmax + 1}, {m, 0, n},
{xx, Xini, Xfin, Xinc}];
Xini = First[GridX]; Xfin = Last[GridX]; )

(*Coeficientes do GTM e GTE*)
I1[n_, m_, xo_] := Block[{func}, func[(x_)?NumericQ]
:=Sqrt[x]*(m*LegendreP[n, m, x]*((x*BesselJ[m + 1, k*xo*Sqrt[1 -
x^2]])/Sqrt[1 - x^2] (m*BesselJ[m, k*xo*Sqrt[1 - x^2]])/(k*xo*(x + 1))) -
(m + n)*(-m + n + 1)* LegendreP[n, m - 1, x]*((m*BesselJ[m, k*xo*Sqrt[1 -
x^2]])/(k*xo*Sqrt[1 - x^2]) BesselJ[m + 1, k*xo*Sqrt[1 -
x^2]])))/E^(fw^2*(1 - x^2));
NIntegrate[((n - m)!!*func[x])/(m + n)!!, {x, cosmax, 1}, AccuracyGoal ->
6, Compiled -> False, MaxRecursion -> 100]];
I2[n_, m_, xo_] := Block[{func}, func[(x_)?NumericQ] :=
Sqrt[x]*(LegendreP[n, m, x]*((m*BesselJ[m, k*xo*Sqrt[1 - x^2]])/(k*xo*(x +
1)) - BesselJ[m + 1, k*xo*Sqrt[1 - x^2]])/Sqrt[1 - x^2]) - ((m + n)*(-m + n
+ 1)*LegendreP[n, m - 1, x]*BesselJ[m, k*xo*Sqrt[1 - x^2]])/(k*xo*Sqrt[1 -
x^2])))/E^(fw^2*(1 - x^2)); NIntegrate[((n - m)!!*func[x])/(m + n)!!, {x,
cosmax, 1}, AccuracyGoal -> 6, Compiled -> False, MaxRecursion -> 100]]; )
MI1 = Apply[I1[#1, #2, #3] & , GridXN, {3}];
MI2 = Apply[I2[#1, #2, #3] & , GridXN, {3}];

```

```
(*Coeficientes de MIE*)
Clear[ψ, ζ, Dψ, Dζ, AB, At, Bt]; ψ[n_, y_] = Sqrt[(y*Pi)/2]*BesselJ[n +
1/2, y];
ζ[n_, y_] = Sqrt[(y*Pi)/2]*(BesselJ[n + 1/2, y] + I*BesselY[n + 1/2, y]);
Dψ[n_, y_] = D[ψ[n, y], y]; Dζ[n_, y_] = D[ζ[n, y], y];
AB[n_, xx_, mm_] = Module[{vPsi, vPsiM, vZeta, vDPsi, vDPsiM, vDZeta},
vPsi = ψ[n, xx]; vPsiM = ψ[n, mm*xx]; vZeta = ζ[n, xx]; vDPsi = Dψ[n, xx];
vDPsiM = Dψ[n, mm*xx]; vDZeta = Dζ[n, xx];
{(mm*vPsiM*vDPsi - vPsi*vDPsiM)/(mm*vPsiM*vDZeta - vZeta*vDPsiM),
(vPsiM*vDPsi - mm*vPsi*vDPsiM)/(vPsiM*vDZeta - mm*vZeta*vDPsiM)}];
{At, Bt} = AB[GridN, χ, η];

(*Seção de Choque da Pressão de Radiação*)
(GTM[n_, m_, xo_] /; m >= 0 := (4*Pi*I^(n - m)*Sqrt[((2*n + 1)*(n - m)!)/
((4*Pi*n*(n + 1))*(m + n)!)]*(m + n)!!*MI1[[n,m + 1,xo]]/(n - m)!!; )*
(GTE[n_, m_, xo_] /; m >= 0 := (4*Pi*I^(-m + n + 1)*m*
Sqrt[((2*n + 1)*(n - m)!)/((4*Pi*n*(n + 1))*(m + n)!)]*(m + n)!!*MI2[[n,m +
1,xo]])/
(n - m)!!; )*(GTM[n_, m_, xo_] /; m < 0 :=
(4*Pi*I^(n - m)*Sqrt[((2*n + 1)*(m + n)!)/((4*Pi*n*(n + 1))*(n - m)!)]*(m
+ n)!!*
MI1[[n,Abs[m] + 1,xo]]/(n - m)!!; )*
(GTE[n_, m_, xo_] /; m < 0 := (4*Pi*I^(-m + n + 1)*m*
Sqrt[((2*n + 1)*(m + n)!)/((4*Pi*n*(n + 1))*(n - m)!)]*(m +
n)!!*MI2[[n,Abs[m] + 1,xo]])/
(n - m)!!; )*(GTMP[n_, m_, xo_] /; m >= 0 :=
(4*Pi*I^(n + 1)*m*Sqrt[((2*n + 1)*(n - m)!)/((4*Pi*n*(n + 1))*(m +
n)!)]*(m + n)!!*
MI2[[n,m + 1,xo]]/(n - m)!!; )*(GTEP[n_, m_, xo_] /; m >= 0 :=
-((4*Pi*I^n*Sqrt[((2*n + 1)*(n - m)!)/((4*Pi*n*(n + 1))*(m + n)!)]*(m +
n)!!*MI1[[n,m + 1,xo]])/
(n - m)!!; )*(GTMP[n_, m_, xo_] /; m < 0 :=
(4*Pi*I^(n + 1)*m*Sqrt[((2*n + 1)*(m + n)!)/((4*Pi*n*(n + 1))*(n -
m)!)]*(m + n)!!*
MI2[[n,Abs[m] + 1,xo]]/(n - m)!!; )*
(GTEP[n_, m_, xo_] /; m < 0 := -((4*Pi*I^n*Sqrt[((2*n + 1)*(m +
n)!)/((4*Pi*n*(n + 1))*(n - m)!)]*(
m + n)!!*MI1[[n,Abs[m] + 1,xo]]/(n - m)!!);
```

```

TermosM[n_, m_, xo_] := Block[{An, Bn, Cn, Fat1, Fat2},
An = -2*At[[n]]*Conjugate[At[[n + 1]]] + Conjugate[At[[n + 1]]] + At[[n]];
Bn = -2*Bt[[n]]*Conjugate[Bt[[n + 1]]] + Conjugate[Bt[[n + 1]]] + Bt[[n]];
Fat1 = Re[I*(Conjugate[Bn*GTE[n, -m, xo]]*GTE[n + 1, -(m + 1), xo] +
Bn*Conjugate[GTE[n + 1, m + 1, xo]]*GTE[n, m, xo] + Conjugate[An*GTM[n, -m,
xo]]*
GTM[n + 1, -(m + 1), xo] + An*Conjugate[GTM[n + 1, m + 1, xo]]*GTM[n, m,
xo]]];
Fat2 = If[m == -n, 0, Re[I*(Cn*GTM[n, m - 1, xo]*Conjugate[GTE[n, m, xo]] -
Conjugate[Cn*GTM[n, m, xo]]*GTE[n, m - 1, xo]]];
(Sqrt[(n*(n + 2))/((2*n + 3)*(2*n + 1))]*Sqrt[(m + n + 2)*(m + n +
1)]*Fat1)/(n + 1) -
(Sqrt[(-m + n + 1)*(m + n)]*Fat2)/(n*(n + 1));
TermosMp[n_, m_, xo_] :=
Block[{An, Bn, Cn, Fat1, Fat2}, An = -2*At[[n]]*Conjugate[At[[n + 1]]] +
Conjugate[At[[n + 1]]] +
At[[n]]; Bn = -2*Bt[[n]]*Conjugate[Bt[[n + 1]]] + Conjugate[Bt[[n + 1]]] +
Bt[[n]];
Cn = -2*At[[n]]*Conjugate[Bt[[n]]] + Conjugate[Bt[[n]]] + At[[n]];
Fat1 = Im[I*(Conjugate[Bn*GTEp[n, -m, xo]]*GTEp[n + 1, -(m + 1), xo] +
Bn*Conjugate[GTEp[n + 1, m + 1, xo]]*GTEp[n, m, xo] + Conjugate[An*GTMp[n,
-m, xo]]*
GTMp[n + 1, -(m + 1), xo] + An*Conjugate[GTMp[n + 1, m + 1,
xo]]*GTMp[n, m, xo]]];
Fat2 = If[m == -n, 0, Im[I*(Cn*GTMp[n, m - 1, xo]*Conjugate[GTEp[n, m, xo]]
- Conjugate[Cn*GTMp[n, m, xo]]*GTEp[n, m - 1, xo]]];
(Sqrt[(n*(n + 2))/((2*n + 3)*(2*n + 1))]*Sqrt[(m + n + 2)*(m + n +
1)]*Fat1)/(n + 1) -
(Sqrt[(-m + n + 1)*(m + n)]*Fat2)/(n*(n + 1));
TermosZM[n_, m_, xo_] := Block[{An, Bn, Cn, Fat1, Fat2, Fat3},
An = -2*At[[n]]*Conjugate[At[[n + 1]]] + Conjugate[At[[n + 1]]] + At[[n]];
Bn = -2*Bt[[n]]*Conjugate[Bt[[n + 1]]] + Conjugate[Bt[[n + 1]]] + Bt[[n]];
Cn = -2*At[[n]]*Conjugate[Bt[[n]]] + Conjugate[Bt[[n]]] + At[[n]];
Fat1 = Re[I*An*GTM[n, m, xo]*Conjugate[GTM[n + 1, m, xo]]];
Fat2 = Re[I*Bn*GTE[n, m, xo]*Conjugate[GTE[n + 1, m, xo]]];
Fat3 = Re[I*Cn*GTM[n, m, xo]*Conjugate[GTE[n, m, xo]]];
(Sqrt[(m + n + 1)*(-m + n + 1)]*Sqrt[(n*(n + 2))/((2*n + 3)*(2*n +
1))]*(Fat1 + Fat2))/(n + 1) +

```

```

(m*Fat3)/(n*(n + 1)); TermosZMp[n_, m_, xo_] := Block[{An, Bn, Cn, Fat1,
Fat2, Fat3},
An = -2*At[[n]]*Conjugate[At[[n + 1]]] + Conjugate[At[[n + 1]]] + At[[n]];
Bn = -2*Bt[[n]]*Conjugate[Bt[[n + 1]]] + Conjugate[Bt[[n + 1]]] + Bt[[n]];
Cn = -2*At[[n]]*Conjugate[Bt[[n]]] + Conjugate[Bt[[n]]] + At[[n]];
Fat1 = Re[I*An*GTMp[n, m, xo]*Conjugate[GTMp[n + 1, m, xo]]];
Fat2 = Re[I*Bn*GTEp[n, m, xo]*Conjugate[GTEp[n + 1, m, xo]]];
Fat3 = Re[I*Cn*GTMp[n, m, xo]*Conjugate[GTEp[n, m, xo]]];
(Sqrt[(m + n + 1)*(-m + n + 1)]*Sqrt[(n*(n + 2))/((2*n + 3)*(2*n +
1))]*(Fat1 + Fat2))/(n + 1) +
(m*Fat3)/(n*(n + 1));
SetAttributes[TermosM, Listable]; SetAttributes[TermosMp, Listable];
SetAttributes[TermosZM, Listable]; SetAttributes[TermosZMp, Listable];
SomaM[n_, xo_] := Tr[TermosM[n, Range[-n, n], xo]];
SomaMp[n_, xo_] := Tr[TermosMp[n, Range[-n, n], xo]];
SomaZM[n_, xo_] := Tr[TermosZM[n, Range[-n, n], xo]];
SomaZMp[n_, xo_] := Tr[TermosZMp[n, Range[-n, n], xo]];
SetAttributes[SomaM, Listable];
SetAttributes[SomaMp, Listable]; SetAttributes[SomaZM, Listable];
SetAttributes[SomaZMp, Listable];
ForcaPar[xo_] := (-((0.5*f)/10^6)^2)*n0n1*Tr[SomaM[Range[Nmax - 1], xo]];
ForcaPerp[xo_] := ((0.5*f)/10^6)^2*n0n1*Tr[SomaMp[Range[Nmax - 1], xo]];
ForcaZPar[xo_] := 0.5*(f/10^6)^2*n0n1*Tr[SomaZM[Range[Nmax - 1], xo]];
ForcaZPerp[xo_] := 0.5*(f/10^6)^2*n0n1*Tr[SomaZMp[Range[Nmax - 1], xo]];

(*Calculo da Forca Radial*)
ForcaParalelo = (ForcaPar[#1] & ) /@ Range[Length[GridX]];
dataPar = Transpose[{GridX, Re[ForcaParalelo]}];
ForcaPerpendicular = (ForcaPerp[#1] & ) /@ Range[Length[GridX]];
dataPerp = Transpose[{GridX, Re[ForcaPerpendicular]}];
ForcaZParalelo = (ForcaZPar[#1] & ) /@ Range[Length[GridX]];
dataZPar = Transpose[{GridX, Re[ForcaZParalelo]}];
ForcaZPerpendicular = (ForcaZPerp[#1] & ) /@ Range[Length[GridX]];
dataZPerp = Transpose[{GridX, Re[ForcaZPerpendicular]}];
data = Transpose[{GridX, ForcaParalelo, ForcaPerpendicular, ForcaZParalelo,
ForcaZPerpendicular}];
Export[StringJoin["Forca_Radial_fo", ToString[NumberForm[fo, 3]], "_d",
ToString[d], "_l",

```



```
ToString[λ], ".dat"], data, "CSV"];
```

## C.6 Programa Força Axial.nb

```
(*Força Óptica Radial Exato em  $\mu$  - esferas*)
(*by Antonio A . R . Neves*)
(*Versão 13/1/2006*)
(*Instruções:Para executar clique em:
Kernel -> Evaluation -> Evaluate Notebook*)

(*Inicializações*)
Clear["Global`*"];
Off[General::spell];
Off[General::spell1];
SetDirectory["C:\\"];

(*Variáveis*)
(* Todos os valores de dimensões estão em microns e os angulos em
radianos.*)
λ = 0.7944;
NA = 1.25;
f = 1700;
ωb = 2500;
d = 6;
nv = 1.4883 + 1.9023/(10^2*λ^2) - 4.25016/(10^3*λ^4);
na = 1.3253 + 2.7553/(10^3*λ^2) + 3.779/(10^5*λ^4);
nagua[λ_] := 1.3253 + 2.7553/(10^3*λ^2) + 3.779/(10^5*λ^4);
np = 1.5725 + 3.108/(10^3*λ^2) + 3.4779/(10^4*λ^4);
k = (2*Pi*na)/λ;
αmax = ArcSin[NA/na];
kf = k*f;
fω = (f/ωb)*0.1;
fo = 1/(fω*Sin[αmax]);
η = np/na;
```

```
n0n1 = 1/Sqrt[nv];
χ = Pi*d*(na/λ);
X = 1; Nmax = IntegerPart[χ] + 10;
Zini = -12;
Zinc = 0.3;
Zfin = 15;
cosmax = Cos[αmax];
GridZ = Range[Zini, Zfin, Zinc];
GridN1 = Range[1, Nmax];
GridN = Range[1, Nmax + 1];
GridZN = Outer[List, GridN, GridZ];
Zini = First[GridZ];
Zfin = Last[GridZ];

(* Coeficientes do GTM e GTE*)
I0[n_, xo_] := Block[{func}, func[(x_)?NumericQ] := (Sqrt[x/(1 -
x^2)]*(LegendreP[n, 1, x]*(1 - x) - n*(n + 1)*Sqrt[1 - x^2]*LegendreP[n,
x]))/(E^((1 - x^2)*fω^2)* E^(I*k*xo*x)); NIntegrate[func[x], {x, cosmax,
1}, AccuracyGoal -> 7, Compiled -> False, MaxRecursion -> 100]];
MI0 = Apply[I0[#1, #2] & , GridZN, {2}];

(* Coeficientes de MIE*)
Clear[ψ, ζ, Dψ, Dζ, AB, At, Bt];
ψ[n_, y_] = Sqrt[(y*Pi)/2]*BesselJ[n + 1/2, y];
ζ[n_, y_] = Sqrt[(y*Pi)/2]*(BesselJ[n + 1/2, y] + I*BesselY[n + 1/2, y]);
Dψ[n_, y_] = D[ψ[n, y], y];
Dζ[n_, y_] = D[ζ[n, y], y];
AB[n_, xx_, mm_] = Module[{vPsi, vPsiM, vZeta, vDPsi, vDPsiM, vDZeta},
vPsi = ψ[n, xx]; vPsiM = ψ[n, mm*xx];
vZeta = ζ[n, xx];
vDPsi = Dψ[n, xx]; vDPsiM = Dψ[n, mm*xx]; vDZeta = Dζ[n, xx];
{(mm*vPsiM*vDPsi - vPsi*vDPsiM)/(mm*vPsiM*vDZeta - vZeta*vDPsiM),
(vPsiM*vDPsi - mm*vPsi*vDPsiM)/(vPsiM*vDZeta - mm*vZeta*vDPsiM)}];
{At, Bt} = AB[GridN, χ, η];

(*Secao de Choque da Pressao de Radiacao em Z Axial*)
```

---

```

CpZ[n_, xo_] := (1/(n + 1)^3)*Re[(At[[n]] + Conjugate[At[[n + 1]]] -
2*At[[n]]*Conjugate[At[[n + 1]]] + Bt[[n]] + Conjugate[Bt[[n + 1]]] -
2*Bt[[n]]*Conjugate[Bt[[n + 1]]])*MI0[[n,xo]]* Conjugate[MI0[[n + 1,xo]]]];
SetAttributes[CpZ, Listable];

(*Calculo da Forca*)
ForcaZ[xo_] := Pi*(f/10^6)^2*n0n1*Tr[CpZ[Range[Nmax], xo]];
ForcaAxial = (ForcaZ[#1] & ) /@ Range[Length[GridZ]];
fForcaAxial = ListInterpolation[Re[ForcaAxial], {{Zini, Zfin}}];
data = Transpose[{GridZ, Re[ForcaAxial]}];
ListPlot[data, PlotJoined -> False, PlotRange -> All];

(*Salvar*Dados*)
Export[StringJoin["Forca_Axial_fo", ToString[NumberForm[fo, 3]], "_d",
ToString[d], "_l", ToString[λ], ".dat"], data, "CSV"];

```